Grup Automorfisma Graf Tangga dan Graf Lingkaran

Muhammad Abdy[1], Wahidah Sanusi[1], dan Armansyah[1, a)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224*

[a)] arman97.syah@gmail.com

***Abstrak**. Automorfisma dari suatu graf G merupakan isomorfisma dari graf G ke dirinya sendiri, yaitu fungsi yang memetakan dirinya sendiri. Automorfisma suatu graf dapat dicari dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu, onto serta isomorfisma dari himpunan titik pada graf tersebut. Tulisan ini difokuskan pada penentuan banyaknya fungsi pada graf tangga dan graf lingkaran yang automorfisma serta grup yang dibentuk oleh himpunan automorfisma dari kedua graf tersebut. Sebagai hasil penelitian, diperoleh bahwa graf tangga L_1 membentuk grup abelian berorde-2, graf tangga L_2membentuk grup dihedral berorde-8, dan graf tangga L_n, $n \geq 3$ membentuk grup abelian berorde-4. Sedangkan graf lingkaran C_n, $n \geq 3$, membentuk grup dihedral berorde-2n.*
***Kata Kunci:** Automorfisma, Graf Lingkaran, Graf Tangga, Grup*

***Abstract.** Automorphism of graph G is isomorphism of graph G to itself i.e. the function that maps itself. Automorphism of graph can be looked for by determining all posissibility of function which is one-to-one, onto, and isomorphism of vertex set at graph. This paper is focused on determining the number of functions of ladder graph and cycle graph that are automorphism and the groups formed by both graphs. As a result of research, found that ladder graph L_1 forms an abelian group of order 2, ladder graph L_2 forms a dihedral group of order 8, and ladder graph $L_n, n \geq 3$ forms an abelian group of order 4. In other side, cycle graph C_n, $n \geq 3$ forms a dihedral group of order 2n.*
***Keywords:** Automorphism, Cycle Graph, Ladder Graph, Group*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang berkembang sangat pesat, dimana dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Hasanah, 2008). Teori graf menarik untuk dibahas karena keunikannya dan banyak diterapkan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya. (Purwanto, 1998).

Salah satu topik yang menarik dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisma graf. Automorfisma graf merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik V(G) atau himpunan sisi-sisi E(G) dari graf G (Chartrand & Lesniak, 1996). Untuk mencari automorfisma suatu graf, biasanya dilakukan dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu, onto, dan isomorfisma dari himpunan titik pada graf tersebut.

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang automorfisma pada graf. Fitriyah (2011) memperlihatkan bagaimana automorfisma graf roda pada W_n dan graf tangga pada L_2 dan L_3 serta bagaimana pola fungsi graf tersebut. Penelitian lainnya dilakukan oleh Damayanti (2011) yang memperlihatkan bentuk automorfisma graf bintang dan graf lintasan. Dalam penelitian tersebut juga menunjukkan grup yang dibentuk dari himpunan semua automorfisma pada graf.

Penelitian ini mengembangkan hasil penelitian Fitriyah (2011), yaitu mencari bentuk automorfisma pada graf lingkaran pada L_1 sampai L_n bersama dengan graf lingkaran. Selain itu penelitian ini juga mencari bentuk grup pada himpunan semua automorfisma seperti pada penelitian Damayanti (2011). Oleh karena itu, penulis meneliti Grup Automorfisma Graf Tangga dan Graf Lingkaran.

LANDASAN TEORI

Grup

Suatu sistem aljabar $(G,*)$ dari himpunan tidak kosong G dengan operasi biner *, dikatakan grup jika memenuhi sifat berikut (Tahmir, 2004):

1. $\forall a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Sifat asosiatif);
2. ada $e \in G$ sehingga $\forall a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$ (adanya unsur identitas di G);
3. $\forall a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (adanya unsur invers setiap anggota di G).

Jika $(G,*)$ merupakan grup yang memenuhi sifat komutatif yaitu $a * b = b * a\ \forall a, b \in G$, maka G disebut grup komutatif. Himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan dinotasikan dengan $D_{2n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \geq 3$, dengan operasi komposisi $"\circ"$ yang memenuhi aksioma-aksioma grup disebut grup dihedral (Dammit & Foote, 1991).

Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong V(G) yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan hingga (mungkin kosong) E(G) yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam E(G) adalah sebuah pasangan tak berurutan dari titik-titik di V(G). V(G) disebut himpunan titik dari G dan E(G) disebut himpunan sisi dari G (Budayasa, 2004).

Jenis-Jenis Graf

Graf Tangga

Graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan n titik. Graf tangga dinotasikan dengan L_n, sehingga $L_n = P_2 \times P_n$ (Gallian, 2007).

Graf Lingkaran

Graf Lingkaran (Cycle Graph) C_n adalah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik $(n \geq 3)$ dan n sisi (Chartrand & Lesniak, 1986).

Automorfisma Graf

Automorfisma graf G adalah isomorfisma dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain isomorfisma dari G merupakan permutasi himpunan titik-titk $V(G)$ atau sisi-sisi E(G). Jika φ adalah automorfisma graf G dan $v \in V(G)$ maka $deg\, \varphi(v) = deg\, v$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian dasar atau murni. Metode yang digunakan adalah studi literatur. Fokus kajian penelitian ini ialah menunjukkan automorfisma pada graf tangga dan graf lingkaran serta grup yang dibentuk oleh himpunan automorfisma kedua graf tersebut. Penelitian ini diawali dengan menggambarkan dan memberi label graf tangga dan graf lingkaran kemudian menentukan semua permutasi yang mungkin dan memilih permutasi yang automorfisma. Selanjutnya, membangun teorema tentang banyak automorfisma dan bentuk permutasinya serta menunjukkan bahwa himpunan automorfisma tersebut membentuk grup.

HASIL PENELITIAN

Automorfisma Graf Tangga

Lemma 1

Terdapat 2 automorfisma graf tangga L_1, yaitu:

$\alpha_1 = (v_1)(v_2)$

$\alpha_2 = (v_1, v_2)$

dan membentuk grup abelian berorde-2.

Bukti:

Graf L_1 memiliki 2 titik.

Misalkan titik-titiknya adalah $V(L_1) = \{v_1, v_2\} = \{1,2\}$

$\alpha_1 = (1)(2)$; $\alpha_2 = (1,2)$ merupakan bentuk permutasi dari L_1 ke L_1.

Akan dibuktikan bahwa α_1 dan α_2 merupakan automorfisma.

1. $\alpha_1 = (1)(2)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_1(1) = 1$ dan $\alpha_1(2) = 2$.

   Perhatikan bahwa:

   $(1,2) \in E(L_1)$

   sehingga,

   $\alpha(1,2) = \big(\alpha(1), \alpha(2)\big) = (1,2) \in E(L_1)$

   Jadi, $\alpha_1 = (1)(2)$ merupakan automorfisma.

2. $\alpha_2 = (1,2)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_2(1) = 2$ dan $\alpha_2(2) = 1$.

   Perhatikan bahwa:

   $(1,2) \in E(L_1)$

   sehingga,

   $\alpha(1,2) = \big(\alpha(1), \alpha(2)\big) = (2,1) \in E(L_1)$

   Jadi, $\alpha_2 = (1,2)$ merupakan automorfisma.

TABEL 1. Tabel *Cayley* Automorfisma Graf Tangga-1 (L_1)

$\circ$	α_1	α_2
α_1	α_1	α_2
α_2	α_2	α_1

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh $\mathcal{A}(L_1) = (\alpha_1, \alpha_2)$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau $(\mathcal{A}(L_1), \circ)$ merupakan grup. $(\mathcal{A}(L_1), \circ)$ merupakan grup berorde-2, dimana $\alpha_m \circ \alpha_n = \alpha_n \circ \alpha_m, \forall \alpha_m, \alpha_n \in \mathcal{A}(L_1)$ sehingga terbukti bahwa graf tangga L_1 membentuk grup abelian berorde-2.

Lemma 2

Terdapat 8 automorfisma graf tangga L_2, yaitu:

$\mu_1 = (v_1)(v_2)(v_3)(v_4)$

$\mu_2 = (v_1)(v_2\ v_3)(v_4)$
$\mu_3 = (v_1\ v_4)(v_2)(v_3)$
$\mu_4 = (v_1\ v_2)(v_3\ v_4)$
$\mu_5 = (v_1\ v_3)(v_2\ v_4)$
$\mu_6 = (v_1\ v_4)(v_2\ v_3)$
$\mu_7 = (v_1\ v_3\ v_4\ v_2)$
$\mu_8 = (v_1\ v_2\ v_4\ v_3)$
dan membentuk grup dihedral berorde-8 (D_4)

Bukti:
Graf L_2 memiliki 4 titik.
Misalkan titik-titiknya adalah $V(L_2) = \{v_1, v_2, v_{3,}\ v_4\} = \{1,2,3,4\}$.
$\mu_1 = (1)(2)(3)(4)$; $\mu_2 = (1)(2,3)(4)$; $\mu_3 = (1,4)(2)(3)$; $\mu_4 = (1,2)(3,4)$; $\mu_5 = (1,3)(2,4)$; $\mu_6 = (1,4)(2,3)$; $\mu_7 = (1,3,4,2)$; $\mu_8 = (1,2,4,3)$ merupakan bentuk permutasi dari L_2 ke L_2.
Akan dibuktikan bahwa $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7$ dan μ_8 merupakan automorfisma.

1. $\mu_1 = (1)(2)(3)(4)$

   Fungsi μ_1 merupakan automorfisma karena dapat ditunjukkan bahwa $(1,2) \in E(L_2) \rightarrow \big(\mu_1(1), \mu_1(2)\big) \in E(L_2)$. Begitu juga dengan sisi yang lain pada L_2.

   Hal yang sama juga berlaku untuk $\mu_2 = (1)(2,3)(4)$; $\mu_3 = (1,4)(2)(3)$; $\mu_4 = (1,2)(3,4)$; $\mu_5 = (1,3)(2,4)$; $\mu_6 = (1,4)(2,3)$; $\mu_7 = (1,3,4,2)$; $\mu_8 = (1,2,4,3)$.

TABEL 2. Tabel *Cayley* Automorfisma Graf Tangga-2 (L_2)

$\circ$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
μ_2	μ_2	μ_1	μ_6	μ_8	μ_7	μ_3	μ_5	μ_4
μ_3	μ_3	μ_6	μ_1	μ_7	μ_8	μ_2	μ_4	μ_5
μ_4	μ_4	μ_7	μ_8	μ_1	μ_6	μ_5	μ_2	μ_3
μ_5	μ_5	μ_8	μ_7	μ_6	μ_1	μ_4	μ_3	μ_2
μ_6	μ_6	μ_3	μ_2	μ_5	μ_4	μ_1	μ_8	μ_7
μ_7	μ_7	μ_4	μ_5	μ_3	μ_2	μ_8	μ_6	μ_1
μ_8	μ_8	μ_5	μ_4	μ_2	μ_3	μ_7	μ_1	μ_6

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh $\mathcal{A}(L_2) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8)$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau ($\mathcal{A}(L_2)$,$\circ$) merupakan grup. ($\mathcal{A}(L_2)$,$\circ$) merupakan grup berorde-8 dan automorfisma L_2 diperoleh dari proses rotasi dan refleksi sehingga terbukti bahwa graf tangga L_2 membentuk grup dihedral berorde-8.

Teorema 1

Graf Tangga (L_n) dengan $2n$ titik, $n \geq 3$ memiliki 4 fungsi yang automorfisma berbentuk

1. Untuk n ganjil :

   $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n) \dots (v_{2n})$

   $\theta_2 = (v_1 v_2)(v_3 v_4) \dots (v_n v_{n+1}) \dots (v_{2n-1} v_{2n})$

   $\theta_3 = (v_1 v_{2n-1})(v_2 v_{2n})(v_3 v_{2n-3})(v_4 v_{2n-2}) \dots (v_n)(v_{n+1})$

   $\theta_4 = (v_1 v_{2n})(v_2 v_{2n-1})(v_3 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+1})$

2. Untuk n genap :

   $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n) \dots (v_{2n})$

   $\theta_2 = (v_1 v_2)(v_3 v_4) \dots \big(v_{n-1} v_n\big) \dots (v_{2n-1} v_{2n})$

$\theta_3 = (v_1 v_{2n-1})(v_2 v_{2n})(v_3 v_{2n-3})(v_4 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+2})$

$\theta_4 = (v_1 v_{2n})(v_2 v_{2n-1})(v_3 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+1})$

dan membentuk grup abelian berorde 4.

Bukti:

Graf L_n memiliki $2n$ titik

Misalkan titik-titiknya adalah $V(L_n) = (v_1 v_2 v_3 \dots v_n \dots v_{2n})$.

Misalkan θ adalah automorfisma L_n ke dirinya sendiri.

Akan ditunjukkan $\theta_1, \theta_2, \theta_3$dan θ_4 merupakan automorfisma.

Untuk n *ganjil*

1. $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n) \dots (v_{2n})$

   θ_1 merupakan fungsi identitas sehingga jelas merupakan automorfisma
2. $\theta_2 = (v_1 v_2)(v_3 v_4) \dots (v_n v_{n+1}) \dots (v_{2n-1} v_{2n})$

   Diketahui $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), \dots, (v_n, v_{n+1}), \dots, (v_{2n-1}, v_{2n}) \in E(L_n)$

   θ_2 merupakan automorfisma karena dapat ditunjukkan bahwa

   $\left(v_p, v_q\right) \in E(L_n) \to \left(\theta\left(v_p\right), \theta\left(v_q\right)\right) \in E(L_n)\ \forall\ v_p, v_q \in V(L_n)$

Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi berikut:

$\theta_3 = (v_1 v_{2n-1})(v_2 v_{2n})(v_3 v_{2n-3})(v_4 v_{2n-2}) \dots (v_n)(v_{n+1})$

$\theta_4 = (v_1 v_{2n})(v_2 v_{2n-1})(v_3 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+1})$

Untuk n *genap*

1. $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n) \dots (v_{2n})$

   θ_1 merupakan fungsi identitas sehingga jelas merupakan automorfisma
2. $\theta_2 = (v_1 v_2)(v_3 v_4) \dots (v_{n-1} v_n) \dots (v_{2n-1} v_{2n})$

   Diketahui $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), \dots, (v_n, v_{n+1}), \dots, (v_{2n-1}, v_{2n}) \in E(L_n)$

   θ_2 merupakan automorfisma karena dapat ditunjukkan bahwa

   $\left(v_p, v_q\right) \in E(L_n) \to \left(\theta\left(v_p\right), \theta\left(v_q\right)\right) \in E(L_n)\ \forall\ v_p, v_q \in V(L_n)$

Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi berikut:

$\theta_3 = (v_1 v_{2n-1})(v_2 v_{2n})(v_3 v_{2n-3})(v_4 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+2})$

$\theta_4 = (v_1 v_{2n})(v_2 v_{2n-1})(v_3 v_{2n-2}) \dots (v_n\ v_{n+1})$

TABEL 3. Tabel *Cayley* ((L_n),∘)

$\circ$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_2	θ_2	θ_1	θ_4	θ_3
θ_3	θ_3	θ_4	θ_1	θ_2
θ_4	θ_4	θ_3	θ_2	θ_1

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh $\mathcal{A}(L_n) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau ($\mathcal{A}(L_n)$,∘) merupakan grup. ($\mathcal{A}(L_n)$,∘) merupakan grup berorde-4, dimana $\theta_m \circ \theta_n = \theta_n \circ \theta_m, \forall \theta_m, \theta_n \in \mathcal{A}(L_n)$ sehingga terbukti bahwa graf tangga L_n membentuk grup abelian berorde-4.

Automorfisma Graf Lingkaran

Lemma 3

Terdapat 6 automorfisma graf lingkaran C_3, yaitu:

$\beta_1 = (v_1)(v_2)(v_3)$

$\beta_2 = (v_1)(v_2\ v_3)$

$\beta_3 = (v_1\ v_2)(v_3)$

$\beta_4 = (v_1\ v_3)(v_2)$

$\beta_5 = (v_1\ v_2\ v_3)$

$\beta_6 = (v_1\ v_3\ v_2)$

dan membentuk grup dihedral berorde-6.

Bukti:

Graf C_3 memiliki 3 titik.

Misalkan titik-titiknya adalah $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1,2,3\}$

$\beta_1 = (1)(2)(3)$; $\beta_2 = (1)(2,3)$; $\beta_3 = (1,2)(3)$; $\beta_4 = (1,3)(2)$; $\beta_5 = (1,2,3)$;

$\beta_6 = (1,3,2)$ merupakan bentuk permutasi dari C_3 ke C_3

Akan dibuktikan bahwa $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$dan β_6 merupakan automorfisma.

1. $\beta_1 = (1)(2)(3)$

   Fungsi β_1 merupakan automorfisma karena dapat ditunjukkan bahwa $(1,2) \in E(C_3) \rightarrow \big(\beta_1(1), \beta_1(2)\big) \in E(C_3)$. Begitu juga dengan sisi yang lain pada C_3.

   Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi $\beta_2 = (1)(2,3)$; $\beta_3 = (1,2)(3)$; $\beta_4 = (1,3)(2)$; $\beta_5 = (1,2,3)$; $\beta_6 = (1,3,2)$.

TABEL 4. Tabel *Cayley* Automorfisma Lingkaran-3 (C_3)

$\circ$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
β_1	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
β_2	β_2	β_1	β_6	β_5	β_4	β_3
β_3	β_3	β_5	β_1	β_6	β_2	β_4
β_4	β_4	β_6	β_5	β_1	β_3	β_2
β_5	β_5	β_3	β_4	β_2	β_6	β_1
β_6	β_6	β_4	β_2	β_3	β_1	β_5

Berdasarkan Tabel 4 diperoleh $\mathcal{A}(C_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta, \beta_5, \beta_6)$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau $(\mathcal{A}(C_3), \circ)$ merupakan grup. $(\mathcal{A}(C_3), \circ)$ merupakan grup berorde-6 dan automorfisma C_3 diperoleh dari proses rotasi dan refleksi sehingga terbukti bahwa graf lingkaran C_3 membentuk grup dihedral berorde-6.

Teorema 2

Graf Lingkaran C_n dengan n titik memiliki $2n$ fungsi yang automorfisma dan membentuk grup dihedral berorde-2n

Bukti:

Graf C_n memiliki n titik dengan $n \geq 3$.

Misalkan titik-titiknya adalah $V(C_n) = (v_1 v_2 v_3 \ldots v_n)$.

Berdasarkan definisi, graf lingkaran C_n merupakan graf terhubung beraturan 2 yang berarti setiap titik di C_n berderajat 2 dan setiap dua titik yang berbeda terdapat lintasan (*path)* yang menghubungkan titik tersebut dan membentuk jalan tertutup. Dengan demikian, automorfisma graf lingkaran dapat diperoleh dengan cara rotasi dan refleksi.

Misalkan rotasi dilakukan searah jarum jam, maka setiap titik C_n dapat dirotasi sebesar $(\frac{360}{n}k)°$ untuk $k = 1,2,3, \ldots, n$. Dengan demikian, banyaknya permutasi yang mungkin dari proses rotasi adalah sebanyak n

Untuk proses refleksi, jika n ganjil maka pencerminan dapat dilakukan terhadap simetri yang dibentuk titik-titik C_n sehingga banyaknya permutasi yang mungkin sebanyak n. Jika n genap maka pencerminaan terhadap titik dan sisi C_n sebanyak $\frac{n}{2}$ dan pencerminaan terhadap diagonal sebanyak $\frac{n}{2}$, sehingga banyaknya permutasi yang mungkin juga sebanyak n. Dengan demikian, banyak permutasi yang mungkin dari proses refleksi adalah sebanyak n.

Berdasarkan proses rotasi dan refleksi diperoleh banyaknya automorfisma pada graf lingkaran C_n yaitu $n + n = 2n$. Dengan demikian graf lingkaran merupakan anggota himpunan dari grup dihedral karena dibangun dari proses rotasi dan refleksi, sehingga terbukti bahwa grup automorfisma graf lingkaran C_n grup dihedral berorde-$2n$.

KESIMPULAN

1. Graf Tangga-1 (L_1) dengan 2 titik memiliki 2 fungsi yang automorfisma dan membentuk grup abelian berorde-2
2. Graf Tangga-2 (L_2) dengan 4 titik memiliki 8 fungsi yang automorfisma dan membentuk grup dihedral berorde-8 (D_4)
3. Graf Tangga-n (L_n) dengan $2n$ titik . $n \geq 3$ memiliki 4 fungsi yang automorfisma berbentuk :

   Untuk n ganjil :

   $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n) \ldots (v_{2n})$

   $\theta_2 = (v_1v_2)(v_3v_4) \ldots (v_nv_{n+1}) \ldots (v_{2n-1}v_{2n})$

   $\theta_3 = (v_1v_{2n-1})(v_2v_{2n})(v_3v_{2n-3})(v_4v_{2n-2}) \ldots (v_n)(v_{n+1})$

   $\theta_4 = (v_1v_{2n})(v_2v_{2n-1})(v_3v_{2n-2}) \ldots (v_n\, v_{n+1})$

   Untuk n genap :

   $\theta_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n) \ldots (v_{2n})$

   $\theta_2 = (v_1v_2)(v_3v_4) \ldots (v_{n-1}v_n) \ldots (v_{2n-1}v_{2n})$

   $\theta_3 = (v_1v_{2n-1})(v_2v_{2n})(v_3v_{2n-3})(v_4v_{2n-2}) \ldots (v_n\, v_{n+2})$

   $\theta_4 = (v_1v_{2n})(v_2v_{2n-1})(v_3v_{2n-2}) \ldots (v_n\, v_{n+1})$

   dan membentuk grup abelian berorde 4.
4. Graf Lingkaran-n dengan n titik, $n \geq 3$ memiliki $2n$ fungsi yang automorfisma dan membentuk grup dihedral berorde-$2n$.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, K. (2008). *Matematika Diskrit.* Surabaya: UNESA University Press.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1986). *Graphs and Disgraphs Second Edition*. California: A Devition of Wadsworth.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). *Graphs and Disgraphs Third Edition*. California: A Devition of Wadsworth.

Damayanti, R. T. (2011). *Automorfisma Graf Bintang dan Graf Lintasan* (Skripsi tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Dammit, D. S., & Foote, R. M. (1991). *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Fitriyah, A. T. (2011). *Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga* (Skripsi tidak dipublikasikan). Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Gallian, J. A. (2007). A Dinamic Survey of Graf Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, *14*. 12-13.

Hasanah, S. (2008). *Disgraf dari Tabel Cayley Grup Dihedral* (Skripsi tidak dipublikasikan). Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Purwanto. (1998). *Teori Graf*. Malang: IKIP Malang.

Tahmir, S. (2004). *Teori Grup*. Makassar: Andira Publisher.