1. **PENGANTAR KONSEP-KONSEP DASAR GEOMETRI**

 **FAJAR ARWADI**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR**

* 1. **ISTILAH TIDAK TERDEFINISI**

Sebagaimana pada sistem matematika secara umum, pada Geometri Euclid, terdapat istilah tidak terdefinisi, istilah terdefinisi, aksioma/postulat, dan teorema. Kata “tidak terdefinisi” pada istilah tidak terdefinisi di geometri sedikit berbeda dengan istilah “tak terdefinisi” yang juga terdapat dalam ilmu matematika seperti operasi tidak terdefinisi pada bilangan bulat positif dan bilangan tidak terdefinisi pada sistem bilangan real. Istilah tidak terdefinisi berkenaan dengan kosakata yaitu berupa aspek yang dimana merupakan tahapan awal seseorang dalam belajar matematika. Di tingkat sekolah dasar dan menengah, telah dipelajari definisi dari beberapa istilah matematika seperti segitiga, pecahan, polinom, dsb. Seiring waktu di perguruan tinggi, seseorang akan semakin sadar dan secara tepat memahami apa yang diucapkan dan ditulis mengenai definisi dari istilah matematika. Sebagai contoh, ketika kita mempelajari *poligon*, maka yang dimaksud adalah bidang datar yang dibatasi oleh sejumlah ruas garis. Perhatikan bahwa, dalam mendefinisikan poligon, kita menggunakan istilah lainnya yakni *bidang datar* dan *ruas* garis. Lalu apa yang dimaksud dengan bidang datar dan ruas garis?

Misalkan kita mendefinisikan ruas garis sebagai bagian dari suatu garis yang dibatasi oleh dua titik ujung. Dari pendefinisian tersebut, terjadi lagi penggunaan istilah lainnya yakni *garis* dan *titik ujung*. Jika kita mendefinisikan istilah-istilah tersebut, maka kita harus menggunakan istilah lainnya yang selanjutnya mesti didefinisikan lagi. Oleh karena itu, mesti terdapat istilah dimana kita dapat “berhenti” dalam pendefinisian. Istilah tersebutlah yang dinamakan istilah tidak terdefinisi. Konsep tidak terdefinisi inilah yang berperan sebagai “blok pembangun” istilah-istilah matematika lainnya. Pada geometri euclid, istilah tidak terdefinisi memiliki contoh yakni titik, garis, dan bidang. Meskipun dikatakan konsep tidak terdefinisi, bukan berarti kita tidak boleh mendeskripsikan contoh-contoh tersebut. Kita dapat mendeskripsikan titik sebagai sesuatu yang tidak memiliki panjang dan lebar atau garis dideskripsikan sebagai tepi dari suatu “penggaris” yang panjangnya tak hingga.

* 1. **ISTILAH TERDEFINISI**

Secara sederhana, istilah terdefinisi merupakan pernyataan berupa kalimat definitif yang di dalamnya menggunakan baik istilah tidak terdefinisi maupun istilah terdefinisi. Pada pendefinisian, hal-hal yang mesti diperhatikan adalah:

1. Terdapat istilah yang didefinisikan
2. Terdapa kategorisasi istilah yang didefinisikan ke dalam suatu himpunan atau kategori
3. Terdapat perbeadaan antara istilah yang didefinisikan dengan istilah yang lain
4. Dapat di”konvers”kan

Selain menggunakan pola di atas, dalam pendefinisian juga dapat menggunakan kata *jika dan hanya jika* atau *jika*/*apabila*

Contoh:

**Ruas garis** adalah bagian dari suatu garis yang dibatasi oleh dua titik ujung.



Gambar 1.1. Ruas garis yang dibatasi dengan dua titik ujung yakni dan

Pada definisi di atas, terdapat istilah yang didefinisikan yaitu ruas garis, terdapat kategorisasi yaitu suatu garis, terdapat perbeadaan antara istilah yang didefinisikan dengan istilah yang lain yaitu yang dibatasi oleh dua titik ujung, dan dapat dikonvers kan yakni suatu garis yang dibatasi oleh dua titik ujung adalah ruas garis. Notasi ruas garis yakni dengan dua titik ujung dan

Berikut beberapa definisi dari konsep-konsep dasar geometri:

* **Titik tengah** suatu garis adalah titik yang membagi dua garis tersebut ke dalam dua bagian sama panjang.
* **Jarak** antara dua titik *A* dan *B* adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut yang disimbolkan dengan .
* **Ruas garis-ruas garis kongruen**  adalah ruas garis-ruas garis yang mempunyai panjang yang sama ().

Simbol juga dapat digunakan untuk menyatakan dua sudut yang kongruen atau dua sudut yang besarnya sama atau dua segitiga yang kongruen.

* **Sinar** , adalah gabungan ruas garis dan semua titik *X* sedemikian sehingga *B* di antara *A* dan *X*.



Gambar 1.2. Sinar

* **Garis-garis sejajar** adalah garis-garis yang terletak di bidang yang sama dan tidak berpotongan.
* Tiga titik dikatakan **kolinear** jika ketiganya berada pada garis yang sama.
* **Sudut** merupakan gabungan dua sinar yang memiliki titik pangkal yang sama, mis. pada , titik pangkalnya adalah . Titik pangkal ini juga disebut titik sudut.
* Dua sudut dikatakan sudut-sudut **komplementer** jika jumlah besar sudutnya 90°.
* Dua sudut dikatakan sudut-sudut **suplementer** jika jumlah besar sudutnya 1800.
* **Bisektor** suatu sudut adalah sinar yang membagi sudut tersebut ke dalam dua sudut yang. kongruen.
	1. **AKSIOMA/POSTULAT**

Aksioma atau postulat adalah suatu pernyataan yang diterima kebenarannya tanpa pembuktian. Hal yang membedakan aksioma dengan definisi adalah aksioma menyatakan sesuatu itu ada atau sesuatu hal itu benar sedangkan definisi sebatas pernyataan tentang suatu hal untuk memudahkan dalam pendefinisian atau penjelasan tentang apa yang terdapat dalam aksioma atau teorema. Selain itu, aksioma digunakan sebagai dasar untuk membuktikan suatu teorema. Sehingga apabila istilah tidak terdefinisi merupakan “blok pembangun” dari istilah-istilah terdefinisi, maka aksioma dapat dikatakan sebagai “blok pembangun” dari teorema-teorema. Dalam Geometri Euclid, beberapa contoh aksioma adalah sbb:

* Melalui dua titik berbeda, dapat dibuat satu garis.
* Ukuran panjang dari suatu ruas garis adalah berupa suatu bilangan yang unik/tunggal
* Jika *X* merupakan suatu titik di dengan *A-X-B*, maka *AX* + *XB* = *AB*.
* Jika dua garis saling berpotongan, maka kedua garis tersebut berpotongan di satu titik.
	1. **TEOREMA**

Teorema merupakan pernyataan yang dapat atau mesti dibuktikan dengan menggunakan aksioma atau sifat-sifat tertentu. Contoh dari teorema di Geometri Euclid adalah sbb:

* Titik tengah dari suatu ruas garis bersifat tunggal
* Terdapat satu dan hanya satu bisektor untuk suatu sudut
* Sudut-sudut vertikal atau saling bertolak belakang kongruen



Gambar 1.3. dan

* 1. **PENGANTAR PEMBUKTIAN DALAM GEOMETRI**

Pada umumnya yang membedakan ilmu matematika dan ilmu lainnya dalam menarik suatu kesimpulan terhadap suatu hal atau pernyataan adalah pembuktian. Pembuktian merupakan proses menarik kesimpulan dari suatu teorema yang memuat informasi-informasi yang diberikan. Pada ilmu matematika, metode yang digunakan adalah metode yang bersifat deduktif atau sederhananya dari hal yang umum dapat diberlakukan ke hal yang khusus. Dalam proses atau langkah-langkah pembuktian, sifat-sifat dalam aljabar yang merupakan aksioma juga digunakan sebagai bentuk justifikasi/pembenaran. Sifat-sifat tersebut umumnya digunakan untuk penjumlahan/pengurangan panjang ruas garis dan besar sudut. Adapun sifat-sifat dalam aljabar tersebut adalah sebagai berikut:

1. Sifat Kesetaraan (, , dan adalah bilangan real)
Sifat kesetaraan penambahan: Jika , Maka .
Sifat kesetaraan pengurangan: Jika , Maka .
Sifat kesetaraan perkalian: Jika , maka .
Sifat kesetaraan pembagian: Jika dan , Maka .
2. Sifat Aljabar Lebih Lanjut mengenai Kesetaraan (A, B, dan C adalah bilangan real)
Sifat refleksif: A = A.
Sifat simetris: Jika A = B, Maka B = A.
Sifat Distributif: .
Sifat Identitas: Jika , Maka A dapat mensubstitusi pada persamaan apapun.
Sifat Transitif: Jika dan , maka .
Contoh: Diberikan: Buktikan
3. Sifat Ketidaksetaraan (, , dan adalah Angka Nyata)
Penambahan Sifat Ketidaksetaraan: Jika , Maka .
Pengurangan Sifat Ketidaksetaraan: Jika , Maka .

Pada geometri, secara garis besar, terdapat dua jenis pembuktian yakni pembuktian langsung dan pembuktian tidak langsung. Pada pembuktian langsung, proses diawali dengan yang diketahui dan melalui proses justifikasi dengan menggunakan aksioma/sifat atau teorema maka berakhir dengan kesimpulan yang dituju. Contoh pembuktian langsung dengan menggunakan sifat-sifat aljabar disajikan sebagai berikut:

1. Diberikan:

buktikanlah:

|  |
| --- |
| Bukti |
| Pernyataan | Alasan |
| 1. | 1.Diberikan |
| 2. | 2.sifat distributif  |
| 3. | 3.substitusi |
| 4. | 4.sifat kesetaraan penjumlahan |
| 5.  | 5.sifat kesetaraan pembagian |

Catatan:

1. Pada langkah kelima, hasilnya juga dapat diperoleh dengan menerapkan sifat kesetaraan perkalian yakni dengan cara mengalikan kedua ruas dengan
2. Langkah kelima adalah langkah terakhir karena membuktikan pernyataan telah dibuat dan dibenarkan.
3. Diberikan: pada (

Buktikanlah :

|  |
| --- |
| Bukti |
| Pernyataan | Alasan |
| 1. pada  | 1.Diberikan |
| 2. + =  | 2. Postulat penjumlahan ruas garis |
| 3. AB = AB – PB | 3. Sifat Kesetaraan Pengurangan  |

Pada pembuktian tidak langsung, proses diawali dengan mengingkari suatu pernyataan atau akibat dari yang diberikan. Kemudian, melalui proses dengan menggunakan justifikasi berupa sifat-sifat, aksioma, maupun teorema, akan didapatkan sesuatu yang salah atau kontradiksi pada bagian akhir. Metode inilah yang dinamakan **kontradiksi**. Terdapat perbedaan kecil antara kontradiksi dan kontraposisi dimana **kontraposisi** dipelajari pada ilmu logika. Pada kontraposisi, pernyataan yang dibuktikan adalah yang berbentuk implikasi dan dibuktikan dengan berawal dari dan berakhir dengan . Sedangkan kontradiksi digunakan untuk membuktikan pernyataan yang sifatnya lebih umum, tidak sebatas pernyataan yang berbentuk .

Contoh:

*Buktikan bahwa titik tengah setiap segmen garis adalah tunggal!*

Bukti: Misalkan terdapat dua titik tengah , yakni titik P dan Q P ≠ Q.

Berdasarkan definisi titik tengah diperoleh :

 dan

Sehingga diperoleh:

 . . . (i)

dan

 (ii)

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh :

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan berlaku pada karena , maka jelas titik dan merupakan titik yang sama.

Maka terbukti bahwa hanya ada satu titik tengah pada setiap tiap ruas garis.