Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert

Syafruddin Side1, Maya Sari Wahyuni1, dan Indah Permatasari1, a)

1Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224

a) permatasariindah971@gmail.com

**Abstrak**. Penelitian ini mengkaji terbentuknya persamaan Laplace dan menerapkan metode D’alembert dalam menentukan solusi persamaan Laplace. Bentuk umum persamaan Laplace yaitu:

$$\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}=0$$

Penyelesaian persamaan Laplace dengan metode D’alembert dilakukan dengan cara mengenalkan variabel bebas baru, kemudian variabel bebas tersebut diturunkan sehingga terbentuk solusi persamaan laplace. Dengan mensubtitusi nilai awal diperoleh persamaan khusus dari persamaan Laplace yaitu:

$$u\left(x,y\right)=f\left(x\right)\cos(\sqrt{k}y-\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}y))$$

**Kata Kunci:** Metode D’alembert, Persamaan Laplace.

**Abstract.** This research is studying the established of Laplace equation and applying D’alembert method in determining Laplace equation solution. The general type of Laplace equation is:

$$\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}=0$$

*Finishing of Laplace equation by D’alembert method is conducted by introducing a new independent variable, then using partial differential equation variable till the Laplace equation is formed. By substituting the prior number, then we get a specific equation from Laplace equation that used to call with D’alembert finishing:*

$$u\left(x,y\right)=f\left(x\right)\cos(\sqrt{k}y-\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}y))$$

**Keywords:** D’alembert Method, Laplace Equation.

# PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu eksakta yang memainkan peran yang sangat signifikan dalam laju perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, karena banyak sekali permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep matematika. Permasalahan tersebut misalnya dalam bidang fisika, biologi, psikologi, kimia, ekonomi, keuangan, dan lain-lain. Namun dalam bidang tersebut, sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi hanya dengan menggunakan rumus atau konsep yang sederhana, karena banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika (Haidir, 2015).

Salah satu diantara model matematika yang cukup penting adalah Persamaan Diferensial (PD). Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan turunannya. Dengan melibatkan banyak variabel bebas, maka ada dua bentuk persamaan yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (Wahidah, 2015).

Dalam persamaan diferensial parsial, banyak ditemukan masalah pada proses pemodelan matematika, diantaranya pada pemodelan persamaan panas, persamaan gelombang, persamaan Laplace, dan persamaan Telegraf. Penyelesaian persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Salah satu permasalahan dalam persamaan Laplace yaitu masalah distribusi suhu dalam keadaan tunak pada sebuah plat dua dimensi. Dari permasalahan tersebut, akan didapatkan suatu persamaan yang disebut persamaan Laplace. Persamaan Laplace inilah yang dapat diselesaikan dengan sebuah metode yang dikenalkan oleh Jean Le Rond D’alembert seorang matematikawan dari Prancis, dimana metode tersebut lebih dikenal dengan Metode D’alembert. Variabel bebas baru yang merupakan karekteristik dari persamaan diferensial parsial, digunakan dalam metode ini. Sehingga dengan adanya variabel bebas baru ini mempermudah mencari penyelesaian persamaan diferensial parsial (Demang dkk., 2013).

Persamaan Laplace sebelumnya telah diterapkan (Miranti T dkk.,2014) dalam artikelnya yang berjudul “Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson”. Pada penelitian tersebut persamaan Laplace diselesaikan dengan metode Crank-Nicholson agar dapat diperoleh solusi numeriknya. Selain itu, artikel (Demang dkk. 2013) yang berjudul”Penyelesaian Persamaan Gelombang dengan Metode D’alembert” penelitian ini dilakukan dengan cara mengenalkan variabel bebas baru, kemudian variabel bebas tersebut diturunkan sehingga terbentuk penyelesaian persamaan gelombang. Dengan mensubstitusikan nilai awal diperoleh persamaan khusus dari persamaan gelombang yang disebut sebagai penyelesaian D’alembert.

Oleh karena itu, pada artikel ini dibahas mengenai prosedur matematis persamaan Laplace serta menerapkan metode D’alembert dalam menentukan solusi persamaan Laplace.

## Persamaan Diferensial Biasa Linear

Persamaan diferensial biasa linear memiliki bentuk umum sebagaimana pada persamaan (1).

 (1)

dengan ,  disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi disebut input atau unsur nonhomogen. Jika  disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial  biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan bernilai nol untuk semua nilai  dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen.

## Masalah Nilai Awal

Dalam kebanyakan permasalahan, penyelesaian unik bagi satu masalah yang diberikan yang kemudian disebut satu penyelesaian khusus, adalah diperoleh dari satu penyelesaian umum mengikuti satu syarat awal $y\left(x\_{0}\right)=y\_{0}$ dengan diberikan nilai-nilai $x\_{0}$ dan $y\_{0}$ yang digunakan untuk menentukan skalar hasil dari penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Syarat awal adalah syarat yang dikhususkan pada satu titik yang diberikan. Bilangan syarat awal tak bebas pada peringkat persamaan diferensial. Satu persamaan diferensial biasa dengan satu syarat awal disebut masalah nilai awal [MNA]. Jadi, jika secara jelas satu persamaan diferensial biasa diberikan oleh $y^{'}=f\left(x,y\right)$, maka masalah nilai awal diberikan oleh:

  (2)

## Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu variabel bebas (Anggoro dalam Syafruddin, 2014).

Bentuk umum persamaan diferensial parsial adalah

  (3)

Persamaan diferensial parsial linier adalah suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunnan parsialnya. Ketika ada sebuah fungsi  yang bergantung pada dua variable $x$ dan $y$ dan jika diturunkan terhadap $y$ dan $x$ bernilai konstan.

Adapun bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde-2 diberikan dengan

  (4)

dengan dan adalah fungsi-fungsi bergantung pada dan.

## Persamaan Laplace

Persamaan *Laplace* merupakan salah satu jenis persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan permasalahan dalam bidang sains. Persamaan ini merupakan contoh klasik dari persamaan eliptik dan merupakan jenis persamaan diferensial linier orde dua dengan dua peubah. Persamaan *Laplace* yang bentuk umumnya $∆v=0$ sering dijumpai pada teori perpindahan panas, mekanika fluida, elastisitas, elektrostatis dan masalah mekanika dan fisika lainnya Salah satu permasalahan dalam persamaan *Laplace* yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu masalah distribusi suhu dalam keadaan tunak pada sebuah logam dalam dimensi dua berbentuk plat.

Persamaan *Laplace* dapat dituliskan dalam beberapa bentuk yaitu:

1. Persamaan *Laplace* dalam dua dimensi pada sistem koordinar kartesius

  (5)

1. Persamaan *Laplace* dalam tiga dimensi pada sistem koordinar kartesius

 

## Metode D’alembert

Metode *D’alembert* merupakan metode yang digunakan oleh Jean Le Rond *D’alembert* (1717-1783) dalam menyelesaikan persamaan gelombang. Dalam metodenya, digunakan variabel bebas baru yang diperoleh dari karakteristik persamaan diferensial parsial. Sebelum diperoleh variabel bebas baru, terlebih dahulu nilai/akar-akar penyelesaian pada Persamaan Diferensial Parsial (PDP) ditransformasikan. Hasil tranformasi PDP dalam $ξ,η$ disebut bentuk kanonik (standar) dari PDP. Berikut aturan yang digunakan pada transformasi PDP kedalam bentuk kanonik: (Demang dkk, 2013)

1. Jika akar-akar penyelesaian dari PDP adalah dua akar real maka digunakan$ ξ\left(x,y\right) $dan$ η(x,y)$diperoleh dari integrasi dari dua penyelesaian real tersebut.
2. Jika akar-akar penyelesaiannya adalah akar pasangan kompleks maka digunakan $ξ(x,y)$ dan $η(x,y)$yang diperoleh dari bagian real dan imajiner pada pasangan kompleks tersebut.
3. Jika akar-akar penyelesaiannya merupakan satu akar real kembar digunakan$ (x,y)$, sedangkan untuk$ η(x,y)$ dipilih untuk nilai yang lain. Pemilihan nilai $η(x,y)$ diusahakan mempermudah pekerjaan. Sebagai contoh, jika $ξ=x+y$ selanjutnya dipilih $η=x+y$

# METODe PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori, dilakukan pada bulan Oktober - Desember 2017 dengan menggunakan buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas tentang persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, teori mengenai metode D’alembert serta teori mengenai persamaan Laplace.

# Hasil PENELITIAN

## Prosedur matematis persamaan Laplace

Misalkan suatu pelat baja persegi panjang dengan panjang$ p$, lebar *l,* dan tebal $γ$, dipanaskan dan suhunya dijaga konstan pada bagian-bagian tepinya. Pada kedua sisi permukaan pelat disekat sempurna, sehingga tidak ada aliran panas kearah ketebalan $γ$ (Antonius: 2008).

Sebelum menyelesaikan persamaan Laplace terlebih dahulu diasumsikan bahwa

1. Kedua permukaan dilapisi dengan isolator panas.
2. Sisi-sisi plat diberi panas dengan temperatur tertentu.
3. Transfer panas hanya dimungkinkan pada arah x dan y

Berikut pengamatan pada suatu bidang pelat persegi panjang seperti pada gambar 1 (Antonius, 2008).

|  |  |
| --- | --- |
| (a) |  (b) |

**GAMBAR 1**. Aliran panas dua-dimensi dalam pelat persegi panjang

Dari gambar 1 tampak bahwa elemen segi empat *ABCD* berukuran $∆x x ∆y$ dan laju aliran panas dalam arah $x $dan $y$ secara berturut turut adalah $Q(x)$ dan $Q(y)$ melintasi tepi-tepi elemen dalam arah seperti yang ditunjukkan pada gambar 1. Pada saat terjadi kesetimbangan, aliran panas yang masuk ke elemen pelat dalam selang waktu $∆t$ harus sama dengan aliran panas yang keluar dari elemen pelat yaitu:

$$\left[aliran panas yang keluar dari arah horizontal\right]+\left[aliran panas yang masuk dalam arah vertikal\right]=\left[aliran panas yang keluar dalam arah horizontal\right]+\left[aliran panas yang keluar dalam arah vertikal\right]$$

Yang dapat ditulis menjadi

  (6)

Dengan mengalikan persamaan (6) dengan $\left(\frac{1}{∆x ∆y γ ∆t}\right)$ dan menyusunnya kembali, maka di peroleh:

  (7)

Dengan mengambil limitnya dan memandang turunan pertama fungsi dengan satu variabel, maka persamaan (7) dapat ditulis menjadi

  (8)

Berdasarkan hukum konduksi panas Fourierbahwa laju aliran panas $Q(x)$ per-unit elemen dalam arah $x{(kal}/{(cm^{2}s))}$ adalah sebanding terhadap gradien temperature $\frac{∂u(x,y,t)}{∂x}$ maka diperoleh

  (9)

Dimana $k$ adalah koefisien difusi panas $\left(cm^{2}s\right),ρ$ adalah kerapatan massa $\left({gr}/{cm^{3}}\right),$ dan C adalah kapasitas panas dari massa $\left({kal}/{(gr^{0}C)}\right)$.

Analog dalam arah $y$ akan diperoleh

  (10)

Dengan mensubtitusikan persamaan (9) dan (10) ke dalam persamaan (8) maka dihasilkan

  (11)

Dimana $u=u\left(x,y\right), $ karena dalam keadaan setimbang $u$ tidak dipengaruhi oleh waktu. Persamaan (11) disebut persamaan *Laplace* dalam bentuk dua dimensi (Antonius, 2008).

## Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert

Dari hasil pemodelan persamaan *Laplace* dapat ditulis sebagai:

  (12)

Kondisi awal pada persamaan Laplace dapat ditulis sebagai:

  (13)

  (14)

Sebelum pengerjaan dengan metode D’alembert, terlebih dahulu dicari nilai karakteristik untuk persamaan *Laplace*, nilai karakteristik ini dalam metode D’alembert digunakan sebagai variabel bebas baru

Dari persamaan  (Erwin, 2006) maka pada persamaan (12), nilai dari$ R=1, S=0, dan T=1$ , selanjutnya nilai tersebut di subtitusikan ke persamaan

 

diperoleh

 

Dengan demikian persamaan (12) memiliki dua akar imaginer yaitu atau, ini berarti atau . Dengan mengintegralkan kedua nilai akar-akar penyelesaian tersebut, maka diperoleh dua nilai karakteristik yaitu:

  dan  (14)

Karakteristik inilah yang selanjutnya digunakan dalam metode D’alembert sebagai variabel bebas baru. Karena akar persamaan kompleks maka digunakan  dan  yang diperoleh dari bagian real dan imajiner pada pasangan kompleks tersebut. Dari persamaan (14) dapat dituliskan variabel bebas baru yaitu:

  (15)

  (16)

Persamaan (15) dan (16) diturunkan terhadap $x$

 

 

dengan menggunakan aturan rantai, karena $u(x,y)$ suatu fungsi dari  dan ,maka diperoleh:

  (17)

Turunan dari persamaan (15) dan persamaan (16) terhadap $y$ adalah

 

 

Selanjutnya dengan menggunakan aturan rantai, karena $u(x,y)$ suatu fungsi dari  dan ,maka diperoleh :

  (18)

Dengan mensubtitusi persamaan (17) dan persamaan (18) ke persamaan (12) diperoleh:

  (19)

Untuk memperoleh solusi umum persamaan Laplace, di gunakan metode pemisahan variabel pada persamaan (19) sebagai berikut:

 

Misal, maka:

 

  (20)

Dengan mensubtitusi persamaan (20) ke persamaan (19), diperoleh:

  (21)

Persamaan (21) dikalikan dengan, maka:

  (22)

Karena ruas kiri pada persamaan (22) adalah fungsi  saja dan ruas kanan adalah fungsi  saja, maka persamaan tersebut haruslah sama dengan bilangan konstan, yaitu

  (23)

Dari persamaan (23) diperoleh 2 persamaan, yaitu

  (24)

  (25)

Persamaan (24) diubah ke bentuk persamaan diferensial linier homogen orde dua diperoleh:

  (26)

Persamaan (26) adalah persamaan diferensial linier homogen dengan persamaan karakteristik sehingga sehingga solusi homogen persamaan adalah

  (27)

Untuk persamaan (25) diperoleh:

  (28)

Persamaan (28) adalah persamaan diferensial linear homogen dengan persamaan karakteristik sehingga solusi homogen persamaan adalah

  (29)

Dengan demikian, berlaku

  (30)

Diperoleh solusi umum:

  (31)

Persamaan (31) diturunkan terhadap $y$ maka diperoleh:

  (32)

Untuk memperoleh penyelesaian khusus, maka harus mengikuti kondisi awal pada persamaan (31) dan persamaan (32) yaitu dengan memasukkan nilai $y=0$ menjadi:

 

  (33)

Dengan mensubtitusi nilai $f(x)$ pada persamaan (33) ke persamaan (31) diperoleh solusi persamaan Laplace dengan metode D’alembert yang biasa disebut penyelesaian D’alembert.

 

# Pembahasan

Pada penelitian Titis Miranti dkk (2014), persamaan *Laplace* diselesaikan dengan metode *Crank-Nicholson,* pada penelitian Gapar dkk (2015) persamaan *Laplace* diselesaikan dengan metode *Random Walk* dan pada penelitian Supardiyono (2011) persamaan *Laplace* diselesaiakan dengan metode beda hingga, sedangkan pada penelitian “Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert”persamaan *Laplace* diselesaikan dengan metode D’alembert. Hasil penelitiannya menunjukkan hal yang berbeda, karena penelitian Titis Miranti, Gapar dan supardiyono masing-masing menghasilkan solusi numerik sedangkan “Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert” hasilnya analitik.

Demang dkk. (2013) dalam penelitiannya metode D’alembert diterapkan pada persamaan gelombang , sedangkan pada penelitian “Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert” ini, peneliti menerapkan metode D’ Alembert pada persamaan laplace dimensi dua. Hasil penelitian keduanya menunjukkan hal yang berbeda, Karena penerapan metode d’alembert diselesaikan pada persamaan yang berbeda.

Pada penelitian “Solusi Persamaan Laplace dengan Metode D’alembert” ini, penulis menggabungkan dan mengembangkan penelitian dari Titis Miranti dkk, Gapar dkk, Supardiyono dan Demang dkk dengan menerapkan metode *D’alembert* pada persamaan diferensial parsial yaitu pada persamaan laplace dimensi dua. . Dari hasil penelitian, dapat diliat bahwa solusi dari metode ini sama halnya dengan metode analitik pada umumnya yaitu berupa fungsi matematik yang berbentuk $u\left(x,y\right)$, dengan $x$ dan $y$ berturut-turut adalah aliran panas yang masuk pada plat tersebut. Sehingga dengan subtitusi nilai pada $x $ dan $y$ akan diketahui besar suhu pada plat dalam keadaan tunak. Sehingga berbeda dengan penelitian Titis Miranti dkk, Gapar dkk, dan Supardiyono dkk yaitu memperoleh solusi numerik dengan menggunakan persamaan yang sama, dan berbeda juga dengan yang dilakukan oleh Demang dkk, yaitu pada persamaan yang digunakan walaupun hasil yang diperoleh merupakan solusi analitik.

# Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil penelitian :

1. Dalam prosedur matematis persamaan Laplace, pengamatan dilakukan pada suatu pelat baja persegi panjang dengan panjang$ p$ lebar *l,* dan tebal $γ$, dan berlaku asumsi-asumsi: Kedua permukaan dilapisi dengan isolator panas, Sisi-sisi plat diberi panas dengan temperatur tertentu, dan transfer panas hanya dimungkinkan pada arah x dan y sehingga diperoleh solusi persamaan Laplace.
2. Solusi persamaan Laplace dengan metode D’alembert, yaitu:

 

# Daftar Pustaka

Demang, Helmi, & Noviani, E. (2013). Penyelesaian Persamaan Gelombang Dengan Metode D’alembert*. Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya****.*** 2(1).1-6.

Gapar, Yudha, A, Apriansyah. (2015).Solusi Persamaan Laplace dengan Menggunakan Metode Random Walk. *Positron***.**  5(2). 65-69.

Haidir. (2015). Solusi Persamaan Differensial Linear Tak Homogen Orde-N Koefisien Konstan Melalui Metode Variasi Parameter Dan Transformasi Laplace**.** *Skripsi.* Universitas Negeri Makassar.

Hartanto, A, S. (2008). Penyelesaian Numerik Persamaan Laplace dan Persamaan Poisson dalam Pelat Persegi Panjang dan Pelat Cakram dengan Metode Beda-Hingga. *Skripsi.* Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Kreyszig, E. (2006). *Advanced Engineering Mathematics (9th Edition).* Singapore: John Wiley & Sons, Inc

Meyriska, Aulia Harini. (2005). Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial. *Skripsi.* Universitas Negeri Semarang.

Miranti T, Hidayat,R, Kusbudiono. (2014). Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson. *Prosiding Seminar Nasional Matematika.* 19, November 2014, Jember, Indonesia. 320-328.

Sasongko, Setia Budi, (2010). *Metode Numerik dengan Scilab.* Yogyakarta:Binafsi Publisher.

Side, Syafruddin. 2016. *Persamaan Diferensial Parsial.* Edisi 1. Universitas Negeri Makassar. Makassar.

Sugiyarto. (2015). *Persamaan Diferensial.* Edisi 1. Binafsi Publisher. Yogyakarta.

Supardiyono. (2011). Analisis Distribusi Suhu pada Pelat Dua Dimensi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga. *Jurnal Penelitian Fisika dan Aplikasinya (JPFA).*1.2

Wahidah. Wahyuni. dan Ratnasari. (2015). Fungsi Green yang Dikonstruksi pada Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde-n. *Jurnal MSA.* 3.1