Solusi Numerik Model Verhulst pada Estimasi Pertumbuhan Hasil Panen Padi dengan Metode Adam Bashforth-Moulton (ABM)

Syafruddin Side1, Maya Sari Wahyuni1, dan Arifuddin R1, a)

1Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224

a) arhiebangkan@gmail.com

**Abstrak**. Penelitian ini menerapkan metode Adam Bashforth-Moulton untuk menentukan solusi model Verhulst. Bentuk solusi yang diperoleh adalah estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa dengan menggunakan persamaan berikut . Persamaan model Verhulst terlebih dahulu diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk mendapatkan solusi awal ; ; dan . Selanjutnya nilai awal disubstitusi pada persamaan Adam-Bashforth orde-4 untuk mendapatkan nilai prediksi, kemudian nilai prediksi yang diperoleh diperbaiki menggunakan persamaan korektor Adam Moulton orde-4. Pada iterasi ke-14 yaitu saat menunjukkan tahun diperoleh nilai prediktor dan nilai korektor sehingga estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa pada tahun 2021 dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton saat adalah ton.

**Kata Kunci:** Model Verhulst, Metode Runge-Kutta, Metode Adam Bashforth-Moulton

**Abstract.** This research applied Adam Bashforth-Moulton Method to determine the solution of Verhust Model. The form of the solution obtained is estimatation of rice harvest in Gowa Regency by using the following equation . Verhulst model equation firstly solved by using 4th order of Runge-Kutta method to get initial solutions of ; ; and . Furthermore, the initial values subtituted on the 4th order of Adam-Bashforth equation to get the prediction value, then the prediction value obtained was corrected using the corrector equation of 4th order of Adam Moulton. On the 14th iteration that is when shows the year of 2021 retrieved the predictor value of and corrector value of so estimation of rice harvets in Gowa Regency in 2021 by using Adam Bashforth-Moulton method when is ton.

**Keywords:** Verhulst Model, Runge-Kutta Method, Adam Bashforth-Moulton

# PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan salah satu bagian dari matematika yang sangat erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari. Banyak masalah dalam bidang teknik, kesehatan, dan ilmu pengetahuan alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial (Side, 2015). Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui. Berdasarkan banyaknya variabel bebas persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Namun berdasarkan sifat kelinearannya persamaan diferensial terbagi menjadi dua yaitu, persamaan diferensial linear dan non linear. Banyak fenomena alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial misalnya, peluruhan zat radioaktif, hukum Newton tentang gerak, model logistik menurut Verhulst, dan lain-lain. Namun menurut Nurman (2017), yang termasuk persamaan diferensial biasa non linear adalah model logistik menurut Verhulst.

Model logistik adalah model dalam bentuk persamaan diferensial non linear yang menggambarkan pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi merupakan suatu proses yang bersifat kontinu. Terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi yang kontinu diantaranya model populasi eksponensial dan model populasi logistik (Nuraeni, 2017). Suatu persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik atau secara numerik. Sebagian besar persamaan diferensial non linear sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial nonlinear tersebut. Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat nilai kesalahan (Apriadi, 2014). Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) (Munir, 2003).

Metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa terbagi atas dua metode, yaitu metode one-step (satu langkah) dan metode multi-step (banyak langkah). Dalam memperoleh solusi menggunakan metode one-step, dibutuhkan sebuah nilai awal, sedangkan dalam metode multi-step dibutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode one-step. Salah satu metode satu langkah yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta. Metode multi-step biasa disebut sebagai metode prediktor-korektor karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor, salah satu metode multi-step adalah metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktor-korektor. Hal ini dikarenakan turunan suatu fungsi tidak dapat diperoleh menggunakan metode numerik (Djojodjiharjo H, 2000).

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan tersebut, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Hanifah (2013) membahas mengenai analisis model getaran pegas teredam dengan menggunakan metode Adams-Basforth-Moulton dan Runge-Kutta. Nuraeni (2017) membahas mengenai aplikasi persamaan diferensial dalam mencari estimasi jumlah populasi. Kuzairi (2016) membahas mengenai aplikasi metode Adams Bashforth-Moulton (ABM) pada model penyakit kanker. Apriadi (2014) membahas mengenai penyelesaian persamaan bandul sederhana dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. Persamaan bandul sederhana merupakan persamaan diferensial non linear orde dua sehingga persamaan tersebut harus direduksi menjadi sistem yang terdiri dari dua persamaan diferensial orde satu agar dapat diselesaikan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde-4.

Oleh karena itu, pada artikel ini dibahas mengenai solusi numerik model Verhulst yang juga merupakan persamaan diferensial non linear untuk mencari estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton (ABM) orde-4. Menurut Apriadi (2014), metode Adam Bashforth-Moulton orde memberikan solusi yang cukup akurat dalam penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial biasa non linear.

## Persamaan Diferensial Biasa Linear

Persamaan diferensial biasa linear memiliki bentuk umum sebagaimana pada persamaan (1).

  (1)

dengan ,  disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi disebut input atau unsur nonhomogen. Jika  disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial  biasanya disebut *output*. Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linear, yaitu pada persamaan (1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinear. Contoh persamaan diferensial biasa nonlinear,

yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear nonhomogen orde dua (Putri, 2013).

## Model Verhulst

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, yaitu Pierre Verhulst pada tahun 1838. Pada model ini jumlah populasi dipengaruhi oleh lingkungan seperti persediaan makanan. Model logistik mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (equilibrium). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafiknya mendekati konstan. Persamaan (2) merupakan bentuk sederhana untuk laju pertumbuhan relatif yang mengakomoda.

 (2)

apabila persamaan (2) dikalikan diperoleh persamaan (3) yaitu model untuk pertumbuhan populasi yang dikenal sebagai persamaan diferensial logistik

 (3)

## Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode ini ditemukan oleh matematikawan asal Jerman, Carl Runge (1856-1927) dan Wilhelm Kutta (1867-1944). Dasar pemikiran dari metode ini adalah untuk mempertahankan hampiran Taylor, tetapi di dalam penyelesaian PDB dengan metode Taylor tidak praktis karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan  (Asmah, 2004).

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagaimana persamaan (4) (Putri, 2013).

  (4)

dengan



Selain mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya, metode ini juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kesalahan pembulatannya kecil.

## Metode Adam Bashforth-Moulton

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton adalah proses mencari nilai fungsi pada titik tertentu dari persamaan diferensial biasa non linear orde satu dan nilai awal yang diketahui. Metode Adam Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah, yaitu langkah pertama prediksi dan langkah kedua adalah koreksi (Kosasih, 2006). Nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada metode Adam Bashforth-moulton orde empat dapat diperoleh dari metode satu langkah (one-step method), misalnya metode Runge-Kutta.

Tinjau PDB orde satu

 (5)

Jika kedua ruas persamaan (5) diintegrasikan dari sampai

Rumus prediktor diperoleh dengan substitusi interpolasi arah mundur Newton derajat-3 untuk yang terdefenisi pada titik-titik Jika dinotasikan dan digunakan sebagai bentuk operasi selisih mundur derajat- dari fungsi , maka diperoleh hasil sebagai berikut:

 (6)

Apabila persamaan (6) disederhanakan dan diselesaikan dengan integrasi maka diperoleh persamaan (7) dan (8) yaitu persamaan prediktor dan korektor Adam Bashforth-Moulton orde-4 sebagai berikut,

 (7)

 (8)

# METODe PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian terapan, dilakukan pada bulan Desember 2017 – Februari 2018 dengan menggunakan data hasil panen padi sawah di Kabupaten Gowa yang diperoleh dari kantor BPS Kabupaten Gowa.

# Hasil PENELITIAN

**Mencari Nilai Awal Model Verhulst Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde-4**

Berikut data hasil panen padi di Kabupaten Gowa menurut Badan Pusat Statistik (BPS) tahun 2007-2015.

**Tabel 1**. Data Hasil Panen Padi Sawah Kab. Gowa

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| No. | Tahun | Data (Ton) |
| 1 | 2007 | 201790 |
| 2 | 2008 | 216580 |
| 3 | 2009 | 247002 |
| 4 | 2010 | 265848 |
| 5 | 2011 | 218154 |
| 6 | 2012 | 266059 |
| 7 | 2013 | 304766 |
| 8 | 2014 | 309909 |
| 9 | 2015 | 292156 |

Untuk mencari nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 persamaan yang digunakan adalah persamaan (9),

 (9)

Nilai (laju pertumbuhan) dapat ditentukan menggunakan rumus berikut (Uce, 2017),

 j

Sedangkan K adalah kapasitas tampung, nilai K dapat diperoleh dengan cara *trial and error* yaitu mensubstitusikan perkiraan nilai K kedalam model Verhulst (Iswanto, 2012). Karena jumlah hasil panen padi di Kabupaten Gowa sejak tahun 2007-2015 masih berada dibawah 600000 ton, maka diasumsikan nilai kapasitas tampungnya yaitu . Jika nilai dan disubstitusi ke persamaan (9) maka diperoleh persamaan (10).

 (10)

Berikut hasil nilai awal , , dan yang diperoleh dari metode Runge-Kutta orde-4 pada interval [1,15] dengan ukuran langkah dan .

**Tabel 2**. Solusi Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* | *tn* | *h=1* |
|  |  |
| 0 | 1 | 201790 | 9374,726188 |
| 1 | 2 | 211269,4696648 | 9581,470848 |
| 2 | 3 | 220947,1714418 | 9770,909201 |
| 3 | 4 | 230804,9723224 | 9941,405617 |

## Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Adam Bashforth-Moulton Orde-4 Pada Estimasi Hasil Padi di Kabupaten Gowa

Setelah diperoleh nilai awal, selanjutnya dicari solusi numerik yang merupakan estimasi hasil panen padi menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton orde-4. Nilai-nilai , , dan serta nilai disubstitusikan ke persamaan Adam-Bashforth.

Untuk diperoleh,

Selanjutnya dicari nilai ,

Nilai prediktor selanjutnya diperbaiki menggunakan persamaan korektor yaitu persamaan Adam Bashforth-Moulton orde-4.

 .

Nilai prediktor dan korektor selanjutnya digunakan untuk mencari galat relatif,

dari hasil tersebut terlihat bahwa galat relatif lebih kecil dari kriteria pemberhentian , maka iterasi dilanjutkan sampai iterasi ke-15 sehingga diperoleh tabel 3. Semua solusi numerik pada tabel 3 telah memenuhi kriteria pemberhentian . Terlihat bahwa semakin bertambahnya tahun jumlah hasil panen padi sawah di kabupaten Gowa semakin meningkat.

Tabel 3. Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Adam Bashforth-Moulton Orde-4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *tn* | *h=1* | Galat Relatif |
| *Pn(0)* | *Pn*  |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |
| 11 | 12 |  |  |  |
| 12 | 13 |  |  |  |
| 13 | 14 |  |  |  |
| 14 | 15 |  |  |  |

Nilai untuk pada tabel 3 merupakan nilai korektor Adam-Moulton yang menyatakan solusi model Verhulst berbentuk estimasi hasil panen padi. Selanjutnya pada tabel 4 dapat dilihat perbandingan solusi estimasi hasil panen dari model Verhulst menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton orde-4 dengan data yang sebenarnya mulai pada sampai .

**Tabel 4**. Estimasi Hasil Panen Padi

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | Tahun | *h=1* | Data (ton) |
|  |  |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |
| 13 |  |  |  |  |
| 14 |  |  |  |  |

# PEMBAHASAN

Berbeda dengan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Apriadi (2014) tentang penyelesaian numerik menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton orde-4 pada persamaan bandul sederhana yang menunjukkan besarnya sudut yang dibentuk oleh tali bandul dengan garis vertikal pada waktu tertentu.

Dilain sisi penelitian tentang metode Adam Bashforth-Moulton juga pernah dilakukan oleh Muhlish dengan judul penelitian “Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler Pada Tuberkolosis dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adam Bashforth-Moulton (ABM)”. Berdasarkan hasil penyelesaian model imonologi seluler pada tuberkolosis tersebut disimpulkan bahwa solusi dari kedua metode saling berdekatan dan hampir sama, hal tersebut dapat ditunjukkan dengan grafik solusi dari kedua metode tersebut. Galat pemotongan dari kedua metode tersebut lebih kecil dari kriteria pemberhentian yang dikehendaki yaitu sehingga dapat dikatakan bahwa solusi yang diperoleh dengan metode RKF 45 dan metode ABM mendekati solusi eksak.

Sedangkan pada penelitian ini metode Adam Bashforth-Moulton orde-4 digunakan dalam mencari solusi numerik model Verhulst untuk memperoleh estimasi hasil panen padi di Kabupaten Gowa.

# Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa

1. Untuk memperoleh nilai awal model Verhulst yaitu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 terlebih dahulu dicari untuk 0, 1, 2, dan 3. Kemudian mencari , untuk 1, 2, dan 3 dengan menggunakan persamaan .
2. Setelah diperoleh nilai awal selanjutnya digunakan metode Adams Bashforth-Moulton orde-4 dalam menyelesaikan model Verhulst untuk memperoleh estimasi hasil panen. Langkah awal yang dilakukan adalah menggunakan persamaan Adam-Bashforth untuk memprediksi nilai . Nilai prediksi selanjutnya diperbaiki menggunakan persamaan Adams-Moulton orde-4 untuk memperoleh nilai korektor . Nilai prediktor dan korektor digunakan untuk mencari galat relatif. Apabila galat relatif terhadap iterasi sebelumnya kurang dari kriteria pemberhentian, maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi numerik dari persamaan Verhulst tersebut yang menyatakan estimasi hasil panen padi.

# Daftar pustaka

Apriadi, Prihandono, B. & Noviani, E. 2014. Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear. *Buletin Ilmiah Mat.Stat dan Terapannya (Bimaster)*. 03(2): 107-116.

Asmah, S. 2004. Solusi Masalah Nilai Awal Secara Numerik dengan Metode Runge-Kutta*. Skripsi*. Fakultas MIPA Universitas Negeri Makassar. Makassar.

Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta : Gramedia Pustaka Utama.

Iswanto, R. J. 2012. *Pemodelan Matematika (Aplikasi dan Terapannya)*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kuzairi, Yulianto, T & Safitri, L. 2016. Aplikasi Metode Adams Bashforth-Moulton (ABM) pada Model Penyakit Kanker. *Jurnal Matematika “MANTIK”*. 02 (06).

Muhlish. 2015. Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler Pada Tuberkolosis dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton. *Skripsi*. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Malang.

Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Nuraeni, Z. 2017. Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 5(1): 9-16.

Nurman, T. A., & Abdullah, S. 2017. Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan. *Jurnal MSA.* 5(1).

Putri, P. P. 2013. Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Gill. *Skripsi*. Fakultas MIPA Universitas Jember. Jember.

Side, S., Hidri, S., & Jafaruddin, A. 2015. Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra dengan Metode Transformasi Diferensial. *Jurnal MSA*. 3(1): 1-10.

Uce, Silvy, P., Suhaemi, R., & Kartika, H. 2017. Aplikasi Metode Eksponensial dan Logistik Dalam Meramalkan Jumlah Penduduk Kabupaten Karawang Pada Tahun 2020. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SESIOMADIKA).* 6-13.