Solusi Numerik Model Matematika Penyakit Diabetes Mellitus dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat

Syafruddin Side1), Ahmad Zaki2), dan Yulianto3)

1,2,3 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Makassar

1) syafruddinside@yahoo.com

2) ahmadzaki@unm.ac.id

 3) yulianto687@gmail.com

**Abstrak**. Penelitian ini membahas mengenai solusi secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada model matematika penyakit diabetes mellitus. Model matematika penyakit Diabetes Mellitus yang berbentuk sistem persamaan diferensial yang mencakup tiga variabel. Populasi penderita diabetes tanpa komplikasi (D), populasi penderita diabetes komplikasi (C), dan populasi jumlah penderita diabetes (N) sebagai nilai awal dan nilai M, $π$, $α$, $γ$, $σ$, $δ$, $θ$, sebagai parameter yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan dilakukan sebanyak beberapa iterasi dengan waktu interval h = 0,01 tahun. Data yang diperoleh di Dinas Kesehatan Kota Makassar tahun 2016 untuk setiap kelas populasi diperoleh nilai awal yaitu: D(0) = 16.246, C(0) =2500, dan N(0) = 16.496. Nilai awal dan nilai parameter disubtitusikan ke dalam solusi numerik terhadap model yang kemudian disimulasikan menggunakan maple. Berdasarkan data pada tahun 2016 menunjukkan bahwa pada saat t = 5 tahun kedepan besarnya laju populasi penderita diabetes tanpa kompliasi (D) = 22.359, populasi penderita diabetes komplikasi (C) = 407, dan populasi jumlah penderita diabetes (N) = 22.766. Dari hasil yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa besarnya nilai untuk laju setiap kelas populasi pada lima tahun kedepan mengalami kenaikan dikarenakan populasi diabetes mellitus semakin meningkat.

**Kata Kunci:** Diabetes Mellitus, Runge-Kutta Orde Empat,Solusi Numerik.

***Abstract.***This study discusses the solution numerically using the fourth order Runge-Kutta method on the mathematical model of diabetes mellitus disease. The mathematical model of diabetes mellitus disease in the form of a system of differential equations that includes three variable. The population of diabetes without complications (*D*), the population of diabetes complications (*C*) and the population of diabetes (*N*) as the initial value and the value of *M,* $μ$*,* $α$*,* $γ$*,* $σ$*,* $δ$*,* $θ$ as parameters were resolved numerically using the fourth order Runge-Kutta method and performed as many iteration with interval time or *h* = 0,01 years. The Data obtained in Makassar City Health Office 2016 for each class of population obtained initial values are: *D(0)* = 16.246, *C(0)* = 250, and *N(0)* = 16.496. Initial values and parameters values are subtituted into numerical solutions to the model which are then simulated using maple. Based on data in 2016 showed that at the t = 5 years ahead the magnitude of the population of diabetes without complications (*D*) = 22.359, the population of diabetes complications (*C*) = 407 and the total population of diabetes (*N*) = 22.766. From the results obtained can be concluded that the magnitude of the value for the rate of each class of population in the next five years increase due to the population of diabetes mellitus is increasing.

**Keywords:** Diabetes Mellitus, Four Order Runge-Kutta, Numerical Solutions.

# **pendahuluan**

Era globalisasi membawa pengaruh yang sangat besar tidak hanya dalam bidang ekonomi tetapi juga dalam bidang lainnya salah satunya kesehatan. Info-info terkait kesehatan dapat diperoleh dari berbagai sumber *online* yang beberapa merupakan sumber yang dapat dipercaya. Masyarakat semakin sadar akan pentingnya perilaku kehidupan yang sehat. Masyarakat semakin meningkat perhatiannya terhadap penyakit yang tidak menular. Hal ini dikarenakan semakin meningkatnnya frekuensi kejadian penyakit tersebut di masyarakat. Dari sepuluh penyebab utama kematian salah satunya adalah penyakit Diabetes Melitus (DM) [1]. Banyak permasalahan di dunia yang terkait dalam bidang matematika yang dapat dibentuk ke dalam sistem persamaan diferensial. Salah satunya adalah penyakit yang semakin banyak diderita oleh penduduk dunia dan semakin meningkat setiap tahunnya, yaitu penyakit Diabetes Mellitus.

Data dari studi global menunjukkan bahwa jumlah penderita diabetes mellitus pada tahun 2013 diseluruh dunia telah mencapai 382 juta orang. Jika tidak ada tindakan yang dilakukan, jumlah ini diperkirakan akan meningkat menjadi 592 juta orang pada tahun 2035. Saat ini Indonesia berada di urutan ketujuh penderita diabetes mellitus terbesar di dunia dengan jumlah 8,5 juta orang dimulai dari usia 20 s/d 79 tahun [2].

Diabetes Mellitus akan mengeluarkan air seni (urine) yang mengandung kadar gula tinggi. Meskipun Diabetes Mellitus tidak membuat kita merasa sakit, namun bila tidak dikontrol lama kelaman penyakit ini dapat menimbulkan masalah serius [3]. Diabetes Melitus (DM) jika tidak ditangani dengan baik akan mengakibatkan timbulnya komplikasi pada berbagai organ tubuh seperti mata, jantung, ginjal, pembuluh darah kaki, syaraf dan lain-lain [4].

Telah banyak penelitian yang dilakukan mengenai diabetes mellitus salah satunya [5] mengkaji tentang Model Sistem Persamaan Diperensial Biasa (SPDB) Non Linear Dalam Kajian Penyakit Diabetes di Kota Makassar, dan [6] meneliti mengkaji tentang Solusi Numerik Model Penyakit Diabetes Mellitus Tanpa Faktor Genetik Dengan perawatan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat.

Penelitian ini akan dilakukan solusi secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada penelitian yang pernah dilakukan oleh [5]. Metode Runge-Kutta orde empat ini memberikan hasil ketelitian yang lebih tinggi dalam perhitungan dan pembulatan [7].

Sistem persamaan diferensial pada model matematika penyakit diabetes mellitus akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta dan kemudian dilakukan simulasi pada model yang telah di selesaikan secara numerik tersebut dengan data sekunder sesuai kelas populasi pada model yang diperoleh di Kota Makassar berupa nilai awal dan nilai parameter yang diberikan.

## Metode Runge-Kutta

 Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta seperti pada persamaan (2).

 $x\_{i+1}=x\_{i}+Φ\left(t\_{i},x\_{i},h\right)$ (2)

dengan $Φ\left(t\_{i},x\_{i},h\right)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama $x\_{i}$ ke nilai baru $x\_{i+1}$ sepanjang interval h. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum seperti pada persamaan (3)

 $Φ=a\_{1}k\_{1}+a\_{2}k\_{2}+…+a\_{n}k\_{n}$ (3) dengan $a$ adalah konstanta dan $k$ adalah:

$k\_{1}=f\left(t\_{i},x\_{i}\right)$ (4)

$k\_{2}=f\left(t\_{i}+p\_{i}h,x\_{i}+q\_{11}k\_{1}h\right)$ (5)

$k\_{3}=f\left(t\_{i}+p\_{i}h,x\_{i}+q\_{21}k\_{1}h+q\_{22}k\_{2}h\right)$ (6) $k\_{n}=f\left(t\_{i}+p\_{n-1}h,x\_{i}+q\_{n-1,2}k\_{1}h+q\_{n-1,2}k\_{2}h+…+k\_{n-1}h\right)$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai $k\_{1}$ muncul dalam persamaan (5), yang keduanya juga muncul dalam persamaan (6), dan seterusnya [7].

## Metode Runge-Kutta Orde Empat

 Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagaimana pada persamaan (7) [8].

 $x\_{i+1}=x\_{i}+\frac{1}{6}\left(k\_{1}+2k\_{2}+2k\_{3}+k\_{4}\right)h$ (7)

Dengan

 $k\_{1}=f(t\_{i},x\_{i})$

 $k\_{2}=f(t\_{i}+p\_{1}h,x\_{i}+q\_{11}k\_{1},h)$

 $k\_{3}=f(t\_{i}+p\_{2}h,x\_{i}+q\_{21}k\_{1}h+q\_{22}k\_{2}h)$

 $k\_{4}=f(t\_{i}+p\_{3}h,x\_{i}+q\_{31}k\_{1}h+q\_{32}k\_{3}h)$

## Model Matematika Penyakit Diabetes Mellitus

 Model penyakit diabetes mellitus yang digunakan pada penelitian ini adalah model [5] yaitu seperti persamaan (8) hingga (10).

$D^{'}= M-\left(µ+α\right)D+γC$ (8)

$C^{'}= αN-\left(α+θ\right)C$ (9)

$N^{'}=M-µN-\left(σ+δ\right)C$ (10)

Sumber: [5]

# HASIL DAN PEMBAHASAN

 Persamaan (8) sampai (10) diatas akan diselesaikan menggunakan metode runge-kutta orde empat seperti pada persamaan (7). persamaan (8) sampai (10) disubtitusikan pada persamaan runge-kutta orde empat sehingga diperoleh persamaan (12) sampai (14).

$D\_{i+1}=D\_{i}+\frac{1}{6}h\left(k\_{1}+2k\_{2}+2k\_{3}+k\_{4}\right)$ (12)

$C\_{i+1}=C\_{i}+\frac{1}{6}h\left(l\_{1}+2l\_{2}+2l\_{3}+l\_{4}\right)$ (13)

$N\_{i+1} =N\_{i}+\frac{1}{6}h\left(m\_{1}+2m\_{2}+2m\_{3}+m\_{4}\right)$ (14)

Dengan

$$k\_{1}=f\left(t\_{i},D\_{i},C\_{i},N\_{i}\right)=M-\left(μ+α\right)D\_{i}+γC\_{i}$$

$l\_{1}=g\left(t\_{i},D\_{i},C\_{i},N\_{i}\right)=αN\_{i}-(α+θ)C\_{i}$

$m\_{1}=v\left(t\_{i},D\_{i},C\_{i},N\_{i}\right)=M-μN\_{i}-(σ+δ)C\_{i}$

$$k\_{2}=f\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{1}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{i}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2}\right)$$

 $=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{1}\frac{h}{2}\right)+γ(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2})$

$$l\_{2}=g\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{1}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{i}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2}\right)$$

 $=α(N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2})-(α+θ)(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2})$

$$m\_{2}=v\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{1}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{i}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2}\right)$$

 $=M-μ\left(N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2}\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2})$

$$k\_{3}=f\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{2}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2}\right)$$

 $=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{2}\frac{h}{2}\right)+γ(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})$

$$l\_{3}=g\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{2}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2}\right)$$

 $=α(N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2})-(α+θ)(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})$

$m\_{3}=v\left(t\_{i}+\frac{h}{2},D\_{i}+k\_{2}\frac{h}{2},C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2},N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2}\right)$

 $=M-μ\left(N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2}\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})$

$$k\_{4}=f\left(t\_{i}+h,D\_{i}+k\_{3}h, C\_{i}+l\_{3}h, N\_{i}+m\_{3}h\right)$$

 $=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{3}h\right)+γ(C\_{i}+l\_{3}h)$

$$l\_{4}=g\left(t\_{i}+h,D\_{i}+k\_{3}h, C\_{i}+l\_{3}h, N\_{i}+m\_{3}h\right)$$

 $=α(N\_{i}+m\_{3}h)-(α+θ)(C\_{i}+l\_{3}h)$

$$m\_{4}=v\left(t\_{i}+h,D\_{i}+k\_{3}h, C\_{i}+l\_{3}h, N\_{i}+m\_{3}h\right)$$

 $=M-μ\left(N\_{i}+m\_{3}h\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{3}h)$

## Simulasi Model Secara Numerik Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

 Solusi numeric model diabetes mellitus menggunkan metode runge-kutta orde empat dialkukan simulasi untuk lima tahun kedepan dan menggunakan data penderita penyakit diabetes mellitus tahun 2016 yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Makaasar.

 Asumsi yang akan digunakan sebagai nilai awal variabel yang akan digunakan dalam simulasi solusi numerik model penyakit diabetes mellitus menggunakan runge-kutta orde empat dapat dilihat pada Tabel 1.

**TABEL 1.** Nilai Awal

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Varabel | Nilai | Keterangan |
| $$D\_{(0)}$$ | 16.426 | Data jumlah kelas populasi penderita diabetes tanpa komplikasi Dinas Kesehatan Kota Makassar 2016 |
| $$C\_{(0)}$$ | 250 | Data jumlah kelas populasi penderita diabetes komplikasi Dinas Kesehatan Kota Makassar 2016 |
| $$N\_{(0)}$$ | 16.496 | Data jumlah keseluruhan kelas populasi penderita diabetes Dinas Kesehatan Kota Makassar 2016 |

Nilai parameter- parameter yang ada pada model penyakit diabetes mellitus dapat dilihat pada tabel 2.

**TABEL 2.** Nilai Parameter

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Parameter |  Nilai | Keterangan |
| $$M$$ | 4.224 | Jumlah kasus baru |
| $$μ$$ | 0,13869 | Laju kematian alami |
| $$α$$ | 0,01515519 | Probabilitas seseorang menderita diabetes komplikasi |
| $$ γ$$ | 0,08 | Laju penderitas diabetes dapat disembuhkan/kembali ke diabetes tanpa komplikasi |
| $$σ$$ | 0,05 | Laju penderita diabetes terjadi disable |
| $$δ$$ | 0,516 | Laju kematian akibat diabetes komplikasi |

Sumber:[5]

 Simulasi yang dilakukan yaitu dengan mensubtitusikan nilai awal dan nilai parameter-parameter yang diberikan seperti pada Tabel 1 dan 2 kedalam persamaan (8) sampai (10) yang merupakan solusi numerik model matematika penyakit diabetes mellitus menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang selanjutnya akan digambarkan melalui plot grafik menggunakan aplikasi maple.

 Waktu interval atau jarak langkah yang digunakan adalah h=0,01. Semakin kecil jarak langkah yang diberikan maka semakin tinggi pula tingkat ketelitian hasil yang diberikan. Selanjutnya diberikan $D\_{i}=D\_{(0)},C\_{i}=C\_{(0)},N\_{i}=N\_{(0)}$ sebagai nilai awal sehingga diperoleh hasil solusi numerik model matematika penyakit diabetes mellitus menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagaimana pada persamaan (16)sampai (18).

$D\_{i+1}=D\_{i}+\frac{1}{6}h\left(k\_{1}+2k\_{2}+2k\_{3}+k\_{4}\right)$ (16) $C\_{i+1}=C\_{i}+\frac{1}{6}h\left(l\_{1}+2l\_{2}+2l\_{3}+l\_{4}\right)$ (17)

$N\_{i+1} =N\_{i}+\frac{1}{6}h\left(m\_{1}+2m\_{2}+2m\_{3}+m\_{4}\right)$ (18)

Dengan

$k\_{1} =M-\left(μ+α\right)D\_{i}+γC\_{i}$ $=1.744,63104$

$l\_{1}=αN\_{i}-(α+θ)C\_{i} =50,038716$

$m\_{1} =M-μN\_{i}-(σ+δ)C\_{i}=1.794,66976$

$$k\_{2}=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{1}\frac{h}{2}\right)+γ(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2}) =1.743,30904$$

$l\_{2}=α(N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2})-(α+θ)(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2})$ $=49,974592$

$m\_{2}=M-μ\left(N\_{i}+m\_{1}\frac{h}{2}\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{1}\frac{h}{2})=1.793,28364$

$k\_{3}=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{2}\frac{h}{2}\right)+γ(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})$ $=1.743,31004$

$l\_{3}=α(N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2})-(α+θ)(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})=49,974745$

$$m\_{3}=M-μ\left(N\_{i}+m\_{2}\frac{h}{2}\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{2}\frac{h}{2})=1.793,28478 $$

$k\_{4}=M-\left(μ+α\right)\left(D\_{i}+k\_{3}h\right)+γ(C\_{i}+l\_{3}h)$ $=1.741,98902$

$l\_{4}=α(N\_{i}+m\_{3}h)-(α+θ)(C\_{i}+l\_{3}h)$= $49,974744$

$$m\_{4}=M-μ\left(N\_{i}+m\_{3}h\right)-\left(σ+δ\right)(C\_{i}+l\_{3}h)=1.793,28478$$

Kemudian dengan mensubtitusikan nilai $k\_{1}$ sampai $k\_{4}$, $l\_{1}$ sampai $l\_{4}$, $m\_{1}$ sampai $m\_{4}$, dan $n\_{1}$ sampai $n\_{4}$ kedalam persamaan (16) sampai (19) didapatkan solusi numerik model matematika penyakit hepatitis B menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

 $D\_{0+1} =D\_{0}+\frac{1}{6}h(k\_{1}+2k\_{2}+2k\_{3}+k\_{4})=16.263,4353$ $C\_{0+1} =C\_{0}+\frac{1}{6}h\left(l\_{1}+2l\_{2}+2l\_{3}+l\_{4}\right)$ $=250,499854$

 $N\_{0+1 }=N\_{0}+\frac{1}{6}h\left(m\_{1}+2m\_{2}+2m\_{3}+m\_{4}\right)=16.513,9352$

Hasil iterasi untuk kelas populasi akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 1 sampai Gambar 4 .



**GAMBAR 1.** Seluruh Kelas Populasi Penderita Penyakit Diabetes Mellitus



**GAMBAR 2.**  Populasi Penderita Diabetes Tanpa Komplikasi (D)



**GAMBAR 3.** Populasi Penderita Diabetes Komplikasi$ (C)$

 

**GAMBAR 4.** Populasi Seluruh Penderita Diabetes$\left(N\right)$

 Dari hasil yang diperoleh pada gambar 1 sampai gambar 4 dapat disimpulkan bahwa laju populasi penderita diabetes tanpa komplikasi $(D)$, populasi penderita diabetes komplikasi $(C)$ dan populasi sseluruh penderita diabetes (N) mengalami kenaikan untuk lima tahun kedepan.

## Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh adalah

1. Solusi numerik model matematika penyakit diabetes mellitus menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan waktu interval atau $h=0,01$ diperoleh untuk populasi penderita diabetes tanpa komplikasi $D\_{1}=16.263,4353;$ populasi penderita diabetes komplikasi $C\_{1}= 250,499854$; dan populasi seluruh penderita diabetes $N\_{1}= 16.513,9352$.
2. Dengan menyelesaikan simulasi model matematika penyakit diabetes mellitus di kota Makassar menggunakan metode Runge-Kutta orde empat kita dapat memprediksi besarnya populasi yang ada pada model matematika penyakit diabetes mellitus untuk lima tahun kedepan. Diantaranya, besarnya populasi penderita diabetes tanpa komplikasi $(D)$ adalah 22.359, besarnya populasi penderita diabetes komplikasi $(C)$ adalah 407, dan besarnya populasi seluruh penderita diabetes $(N)$ adalah 22.766.

## DAFTAR PUSTAKA

1. Ardiansyah, N., Kharis, M., 2012, Model Matematika Untuk Penyakit Diabetes Tanpa Faktor Genetik, *Jurnal* Unnes, Jurnal MIPA 35 (1) (2012)
2. Efendi, M., Prihandono, B., Kusumastuti, N., 2015, Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Lokal Pada Perubahan Populasi Penderita Diabetes Mellitus, Jurnal, Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya, Volume 04, No.3, hal 135-142
3. Ikromah, E.F., Sulistyarini, T., 2014, Faktor Aktivitas Fisik Mempengaruhi Peningkatan Kadar Gula Darah Pada Pasien Diabetes Mellitus, Jurnal Stikes, Vol.7. No.2 Desember 2014
4. Listiana, N, 2012, Analisis Kestabilan Model Matematika Dari Populasi Penderita Diabetes Mellitus, Semarang: *Jurnal* Matematika. KNM XVI
5. Mursyid, M.A., 2016, Model Sistem Persamaan Diperensial Biasa (SPDB) Non Linear Dalam Kajian Penyakit Diabetes di Kota Makassar, Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNM, Makassar
6. Astari, G.P., 2017, Solusi Numerik Model Penyakit Diabetes Mellitus Tanpa Faktor Genetik Dengan Perawatan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat, Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNM, Makassar.
7. Putri, P. P., 2013, Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat Dan Gill, *Skripsi,* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, Jember
8. Ridwan, M., 2007, Studi Analisis Perbandingan Tingkat Ketelitian Solusi Masalah Nilai Awal Dengan Metode Runge-Kutta dan Metode Prediktor Korektor, Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNM, Makassar