Solusi Numerik Model SIR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Metode Runge-Kutta

Syafruddin Side1, Sukarna1, dan Arli Magfirah Utami1, a)

1Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224

a) arli.magfirahutami@gmail.com

**Abstrak**. Penelitian ini membahas mengenai solusi secara numerik dari model SIR pada penyebaran penyakit menular Tuberkulosis dengan metode Runge-Kutta. Data yang digunakan adalah data sekunder dari penelitian Hasrina (2015) yang berupa model SIR dan jumlah penderita tuberkulosis BTA(+) di Kota Makassar tahun 2015 dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan. Pembahasan dimulai dari penentuan solusi umum dengan metode Runge-Kutta orde empat, penetuan parameter, simulasi dan analisis hasil. Dalam penelitian ini diperoleh grafik pergerakan dari model SIR dengan data riil. Setelah dilakukan analisis dari simulasi numerik terlihat bahwa metode Runge-Kutta orde empat dapat digunakan untuk melihat kecenderungan perlakuan penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar dan menjadi bahan pertimbangan untuk tindakan pencegahan penyakit menular Tuberkulosis.

**Kata Kunci:** Solusi Numerik, Model SIR, Tuberkulosis, Runge-Kutta

**Abstract.** This research discuss about numeric solution from SIR model in the spread of infectious Tuberculosis disease with a Runge-Kutta method. The data that used in this research is a secundary data from Hasrina’s research (2015) that focused on SIR model and number of Tuberculosis BTA(+) in Makassar 2015 from Health Department of South Sulawesi. Discussion is started by determining general solution with fourth order of Runge-Kutta method, parameter decision, simulation and result analyzis. This research gets movement grafic and result analyzis from SIR model by riil data. After conducting an analyzis from numeric simulation seem that the fourth order of Runge-Kutta can be used to analyze the preference of Tuberculosis treatment in Makassar also can be a consideration for preventing action of infectious disease of Tuberculosis.

**Keywords:** Numeric Solution, SIR Model, Tuberculosis, Runge-Kutta

# PENDAHULUAN

Perkembangan dan kemajuan dunia modern saat ini tidak bisa dipisahkan dari matematika. Hampir seluruh aktivitas manusia berkaitan dengan matematika. (Belo, 2016). Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Adapun contohnya yaitu aplikasi untuk mengetahui model penyebaran penyakit menular pada suatu daerah atau wilayah tertentu. Untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, dikenal beberapa model penyebaran penyakit, baik model yang bersifat deterministik, maupun model yang bersifat stokastik. Model-model tersebut memiliki karakteristik tersendiri, berdasarkan jenis dan bentuk penyebaran penyakit menular yang diamati, misalnya Model SIR pada penyakit Tuberkulosis (Hasrina, 2015).

Beberapa model matematika mengenai penyakit menular berbentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (approximation) (Fardinah, 2009). Dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik dapat menggunakan metode one-step (satu langkah), salah satunya metode Runge-Kutta (Mursalin, 2006).

Salah satu penyakit menular yang modelnya dapat diselesaikan secara numerik adalah Tuberkulosis. World Health Organization (WHO) (2009) menyatakan bahwa sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi oleh M. tuberculosis, 9 juta pasien Tuberkulosis baru dan 3 juta kematian akibat Tuberkulosis di seluruh dunia, 95% kasus Tuberkulosis dan 98% kematian akibat Tuberkulosis terjadi pada negara-negara berkembang (Side, 2015). Khusus di Kota Makassar, berdasarkan data yang diperoleh dari Bidang Bina Pencegahan Penyakit dan Penyehatan Lingkungan Dinas Kesehatan Kota Makassar, angka penemuan penderita baru TB Paru BTA(+) tahun 2013 sebanyak 72,44% (ditemukan 1.811 penderita sebanyak 2.500 sasaran), dan 2014 meningkat sebanyak 78,12%, sehingga Kota Makassar termasuk kota yang memprihatinkan untuk penyakit Tuberkulosis (Hasrina, 2015).

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan tersebut, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Asmah (2004) membahas mengenai penggunaan metode Runge-Kutta dalam mencari solusi masalah nilai awal. Putri (2013) membahas mengenai analisis solusi numerik dari model Predator-Prey dengan membandingkan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Gill. Side dkk. (2016) membahas mengenai pemodelan matematika SIR dan SEIR pada penularan penyakit Tuberkulosis dengan menggunakan metode fungsi Lyapunov untuk menganalisis kedua model tersebut. Hasrina (2015) membahas mengenai proses pemodelan SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar dimulai dari menentukan titik equilibrium bebas penyakit, titik equilibrium endemik dan simulasi numeriknya namun, tidak meneliti lebih lanjut mengenai solusi numerik dari model yang telah diperoleh.

Oleh karena itu, pada artikel ini dibahas mengenai solusi numerik model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis dari hasil penelitian Hasrina (2015) dengan metode Runge-Kutta orde empat. Menurut Putri (2013), metode Runge-Kutta orde empat akan memberikan hasil ketelitian yang lebih tinggi dalam perhitungan dan pembulatan dibandingkan Runge-Kutta orde-orde sebelumnya.

## Persamaan Diferensial Biasa Linear

Persamaan diferensial biasa linear memiliki bentuk umum sebagaimana pada persamaan (1).

  (1)

dengan ,  disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi disebut input atau unsur nonhomogen. Jika  disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial  biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan bernilai nol untuk semua nilai  dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferensial biasa linear adalah



yang merupakan persamaan diferensial biasa linear nonhomogen orde satu.

## Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  buah persamaan diferensial, dengan  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten. Bentuk umum dari suatu sistem  persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagaimana pada persamaan (2).





  (2)





dengan  adalah variabel bebas dan  adalah variabel terikat (Neuhauser, 2004).

## Model SIR Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Dalam penelitian Hasrina (2015) ada beberapa asumsi yang digunakan dalam model SIR, yaitu:

1. Terjadi proses kematian.
2. Kematian dapat terjadi pada kelas S, I dan R.
3. Penyakit dapat disembuhkan (individu yang telah sembuh memiliki kekebalan tubuh yang permanen).
4. Semua orang mempunyai peluang yang sama untuk terinfeksi.

Berdasarkan asumsi di atas, model untuk penyebaran penyakit tuberkulosis disajikan dalam bentuk diagram transfer sebagaimana Gambar 1.

$$\frac{rI}{N}$$

$$μ$$

$$μ$$

$$μ$$

S

I

R

A

$$a$$

**GAMBAR 1.** Diagram Transfer Model pada Tuberkulosis

dimana :

S = Jumlah individu yang rentan dalam populasi pada waktu t

I = Jumlah individu yang terinfeksi dalam populasi pada waktu t

R = Jumlah individu yang sembuh dalam populasi pada waktu t

r = Laju penularan penyakit dari *susceptible* menjadi *infectious* 

 = Laju kesembuhan dari *infectious* menjadi *recovered*

A = Nilai awal

 = Laju kematian

Berdasarkan asumsi dan hubungan antara variabel dan parameter pada Gambar 1, di atas dapat dijelaskan dalam persamaan (3) – (5).

  (3)

  (4)

  (5)

dimana N = S + I + R adalah total populasi (Hasrina, 2015).

## Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode ini ditemukan oleh matematikawan asal Jerman, Carl Runge (1856-1927) dan Wilhelm Kutta (1867-1944). Dasar pemikiran dari metode ini adalah untuk mempertahankan hampiran Taylor, tetapi di dalam penyelesaian PDB dengan metode Taylor tidak praktis karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan  (Asmah, 2004).

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagaimana persamaan (6) (Putri, 2013).

  (6)

dengan



Selain mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya, metode ini juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kesalahan pembulatannya kecil.

# METODe PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian terapan, dilakukan pada bulan Maret - Juni 2017 dengan menggunakan data penderita dan data kesembuhan pasien penyakit Tuberkulosis tahun 2015 yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan.

# Hasil PENELITIAN

## Solusi Numerik Model SIR Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Metode Runge-Kutta Orde 4

Model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis yang ada pada persamaan (3) – (5) akan diidentifikasi lebih lanjut ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa seperti pada persamaan (7) – (9).

  (7)

  (8)

  (9)

Persamaan (7) – (9) di atas akan diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagaimana persamaan (6) dengan cara subtitusi sehingga akan menjadi seperti pada persamaan (10) – (12).

  (10)

  (11)

  (12)

dengan  adalah langkah waktu,









Persamaan (10) – (12) merupakan salah satu solusi numerik model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis.

## Penentuan Syarat Awal Model SIR

Nilai awal dan parameter yang digunakan dalam model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis dapat dilihat seperti pada Tabel 1.

**TABEL 1**. Syarat awal yang digunakan dalam model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis

|  |
| --- |
| **Syarat Awal Model SIR** |
| **Variabel dan Parameter** | **Nilai** | **Sumber** |
|  |  | Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  | Badan Pusat Statistik Provinsi Sulawesi Selatan |
|  |  |

Sehingga formulasi model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar adalah seperti pada persamaan (13) – (15).

  (13)

  (14)

  (15)

## Simulasi Program Menggunakan Aplikasi MATLAB

Hasil simulasi persamaan (10) – (12) dengan menggunakan interval waktu  bulan, langkah waktu , serta syarat awal yang berupa nilai parameter dan nilai awal seperti pada Tabel 1, maka diperoleh hasil seperti pada Gambar 2.

Pada plot *suspectible* menunjukkan bahwa populasi sebesar  jiwa dari  jiwa, yang kemudian mengalami peningkatan hingga berada pada posisi , yang artinya pada saat  populasi *suspectible* mencapai sekitar jiwa. Peningkatan tersebut disebabkan oleh jumlah populasi atau nilai awal yang digunakan lebih besar daripada jumlah penurunan populasi pada kelas *suspectible* yang berupa laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectious* dan laju kematian kelas *suspectible*. Pada titik  kelas *suspectible* mencapai titik puncaknya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2(a). Setelah melewati titik puncaknya, terjadi penurunan secara terus menerus kemudian garisnya akan konvergen ke suatu titik, yang menunjukkan bahwa dalam beberapa waktu ke depan, populasi yang rentan akan mengalami penurunan.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  (a) |  (b) |
|  |  |
|  (c) |  (d) |

**GAMBAR 2.** (a) Plot *Suspectible*, (b) Plot *Infectious,* (c) Plot *Recovered*, (d) Plot gabungan Model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis

Pada plot *infectious* menunjukkan bahwa populasi sebesar  jiwa dari  jiwa, yang kemudian mengalami peningkatan secara terus menerus hingga berada pada posisi , yang artinya pada saat  populasi *infectious* mencapai sekitar jiwa. Peningkatan tersebut disebabkan oleh tingkat laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectious* lebih besar daripada laju kesembuhan dari *infectious* menjadi *recovered*, dan laju kematian kelas *infectious*. Pada titik  dan seterusnya, jumlah populasi pada kelas *infectious* mulai berjalan menurun dan kemudian garisnya konvergen ke suatu titik tertentu hingga beberapa waktu ke depan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2(b).

Pada plot *recovered* menunjukkan bahwa populasi sebesar  jiwa dari  jiwa, terlihat bahwa garis tersebut mengalami peningkatan populasi sembuh dari waktu ke waktu. Peningkatan tersebut disebabkan oleh tingkat laju kesembuhan dari *infectious* menjadi *recovered* yang lebih besar daripada laju kematian kelas *recovered* dan tidak berpengaruhnya laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectious*. Hal tersebut ditunjukkan pada Gambar 2(c).

Plot *suspectible, infectious,* dan *recovered* merupakan plot gabungan dari ketiga kelas, yaitu kelas *suspectible,* kelas *infectious,* dan kelas *recovered*. Jika dilihat dari Gambar 2(d), pada kelas *suspectible* terjadi peningkatan sampai pada  bulan kemudian setelah mencapai puncak maka populasinya akan mengalami penurunan dan mendekati ke nol, hal ini dikarenakan sebagian populasi berpindah dari kelas *suspectible* menuju kelas *infectious*, pada kelas *infectious* terjadi peningkatan sampai akhirnya bergerak konvergen pada waktu berikutnya, hal ini dikarenakan sebagian populasi berpindah ke kelas *recovered* melalui beberapa faktor, salah satunya kesembuhan, dan pada kelas *recovered,* dari awal waktu sampai 50 bulan terus mengalami peningkatan yang besar, menjelaskan bahwa tingkat kesembuhan dari waktu ke waktu akan meningkat dan populasi tidak mengalami perpindahan dikarenakan model yang digunakan hanya sampai pada kelas *recovered.*

# Pembahasan

Pada penelitian sebelumnya, Asmah (2004) hanya membahas mengenai penggunaan metode Runge-Kutta dalam mencari solusi masalah nilai awal dalam persamaan diferensial biasa. Putri (2013) membahas mengenai perbandingan analisis solusi numerik dari model Predator-Prey dengan membandingkan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Gill. Side dkk. (2016) membahas mengenai pemodelan matematika SIR dan SEIR pada penularan penyakit Tuberkulosis dengan menggunakan metode fungsi Lyapunov untuk menganalisis kedua model tersebut dan memberikan hasil bahwa kedua model tersebut dapat digunakan untuk menentukan status penyakit Tuberkulosis dalam sebuah wilayah dengan menggunakan simulasi data dari wilayah tertentu.

Pada penelitian Hasrina (2015), hasil yang diperoleh merupakan penerapan dari model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis dengan asumsi-asumsinya, menentukan titik equilibrium dari model sehingga diperoleh dua titik equilibrium, stabilitas dan bilangan reproduksi dasar, serta simulasi dengan menggunakan data sekunder kasus penyakit Tuberkulosis BTA(+) di Kota Makassar. Hasil simulasi menjelaskan bahwa penularan penyakit Tuberkulosis memiliki pengaruh yang besar terhadap model dan menjelaskan bahwa penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar menurun atau bahkan menghilang jika bilangan reproduksi dasarnya kurang dari 1.

Sementara untuk penelitian ini dijelaskan mengenai penggunaan metode numerik dalam hal ini menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk menganalisis model SIR yang telah diperoleh dari penelitian Hasrina. Kemudian, menetapkan parameter-parameter dan nilai awal yang digunakan dengan mempertimbangkan data riil yang diperoleh dari bidang ahlinya, Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan, setelah itu dibuatkan simulasi sesuai dengan data yang diperoleh untuk melihat kecenderungan perlakuan dari penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar.

# Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa,

1. Solusi numerik model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis dengan metode Runge-Kutta orde empat, yaitu







1. Hasil simulasi numerik model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis dengan metode Runge-Kutta orde empat menunjukkan bahwa:
2. Semakin besar interval waktu yang digunakan, maka akan terlihat jelas pergerakan dari setiap kelas. Terjadi peningkatan pada kelas *suspectible, infectious,* dan peningkatan yang sangat lama pada kelas *recovered*, namun untuk kelas *suspectible* setelah mencapai titik puncaknya akan bergerak turun sementara kelas *infectious* dan kelas *recovered* akan bergerak tetap pada waktu berikutnya.
3. Kelas *infectious* akan mengalami peningkatan dipengaruhi oleh tingkat laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectious*. Kelas *infectious* akan mengalami penurunan dipengaruhi oleh tingkat laju kesembuhan penyakit dari *infectious* menjadi *recovered.*
4. Kasus tuberkulosis di Kota Makassar memiliki masa inkubasi dan proses penyembuhan yang agak lama dibandingkan rata-rata data yang diperoleh.
5. Metode Runge-Kutta orde empat dapat digunakan untuk mencari solusi numerik dari model SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar untuk waktu berikutnya.

# Daftar pustaka

Asmah, S. (2004). *Solusi Masalah Nilai Awal Secara Numerik dengan Metode Runge-Kutta* (Skripsi, tidak dipublikasikan). Fakultas MIPA Universitas Negeri Makassar.

Badan Pusat Statistik Provinsi Sulawesi Selatan. (2016). *Provinsi Sulawesi Selatan Dalam Angka*. Makassar. BPS Provinsi Sulawesi Selatan.

Belo, Y.J.T. (2016). *Pemodelan SIRv Penyebaran Flu Babi (H1N1) dengan Vaksinasi Pada Populasi Konstan* (Skripsi, tidak dipublikasikan). Fakultas MIPA Universitas Negeri Makassar

Fardinah. (2009). *Solusi Persamaan Diferensial Biasa Dengan Metode Rung-Kutta Orde Lima dan Metode Euler* (Skripsi, tidak dipublikasikan)*.* Fakultas MIPA Universitas Negeri Makassar

Hasrina. (2015). *Model SIR (Susceptible, Infectious And Recovered) Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar* (Skripsi, tidak dipublikasikan)*.* Fakultas MIPA Univesitas

Mursalin. (2006). *Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Dengan Menggunakan Metode Multi-Step* (Skripsi, tidak dipublikasikan)*.* Fakultas MIPA Universitas Negeri Makassar.

Neuhauser, C. (2004). *Calculus for Biology and Medicine.* New Jersey: Pearson Education.

Putri, P.P. (2013). *Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Gill* (Skripsi, tidak dipublikasikan). Fakultas MIPA Universitas Jember.

Side, S. (2015). A Susceptible-Infected\_Recovered Model and Simulation for Transmission of Tuberculosis. *Advance Science Letters*, *21*(2). 137-139.

Side, S., Sanusi, W., Aidid, M.K., Sidjara, S. (2016). Global Stability of SIR and SEIR Model for Tuberculosis Disease Transmission with Lyapunov Function Method. *Asian Journal of Applied Sciences*, *9*(3). 87-96.