SKRIPSI

PENDEKATAN *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP) DALAM *SMALL AREA ESTIMATION*

IIN AYUDHINA FAJRIN H

PROGRAM STUDI STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2017

SKRIPSI

PENDEKATAN *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP) DALAM *SMALL AREA ESTIMATION*

Diajukan kepada Program Studi Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam untuk memenuhi
salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Statistika

IIN AYUDHINA FAJRIN H
1317142008

PROGRAM STUDI STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2017

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh **Iin Ayudhina Fajrin H** dengan Nomor Induk **1317142008,** berjudul **Pendekatan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dalam *Small Area Estimation.*** telah dipertahankan dihadapan dewan penguji dengan SK No. 4653/UN36.1/KM/2017, tanggal 15 Desember 2017 untuk memenuhi sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Statistika pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar pada hari Rabu Tanggal 20 Desember 2017.

Disahkan oleh:
Dekan Fakultas MIPA
Universitas Negeri Makassar

Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.
NIP. 196204171988031001

Panitia Ujian

1.	Ketua Ujian	:	Dr. M. Agus Martawijaya, M.Pd.	(……………………)
2.	Sekertaris Ujian	:	Prof. Drs. H. M. Arif Tiro, M.Pd., M.Sc., Ph.D.	(……………………)
3.	Pembimbing I	:	Drs. Muhammad Nusrang, M.Si.	(……………………)
4.	Pembimbing II	:	Muhammad Kasim Aidid, S.Si., M.Si.	(……………………)
5.	Penguji I	:	Prof. Dr. dr. M. Nadjib Bustan, MPH.	(……………………)
6.	Penguji II	:	Adiatma, S.Pd., M.Si.	(……………………)

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk telah saya nyatakan dengan benar. Bila dikemudian hari ternyata pernyataan saya terbukti tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan oleh FMIPA Universitas Negeri Makassar,

Yang membuat pernyataan

Nama : Iin Ayudhina Fajrin H

NIM : 1317142008

Tanggal : 20 Desember 2017

PERSETUJUAN PUBLIKASI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademi Universitas Negeri Makassar, saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Iin Ayudhina Fajrin H
Nim	: 1317142008
Program Studi	: Statistika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Demi kepentingan ilmu pengetahuan, saya menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Negeri Makassar **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas skripsi saya yang berjudul :

Pendekatan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

dalam *Small Area Estimation*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Negeri Makassar berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	: Makassar
Pada tanggal	: 20 Desember 2017

Yang Menyatakan,

Iin Ayudhina Fajrin H

Menyetujui,

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Muhammad Nusrang, M.Si.	Muhammad Kasim Aidid, S.Si., M.Si.
NIP. 196612311991031020	NIP. 197808172008121003

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

"Mereka mungkin akan ragu dengan apa yang kamu katakan, tetapi mereka akan percaya dengan apa yang kamu lakukan"

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu. Dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kamu. Allah Maha mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui"

(Al-Baqarah: 216)

"Bermimpilah seakan kau hidup selamanya.

Hiduplah seakan kau akan mati hari ini"

(James Dean)

Kupersembahkan sebuah karya kecil ini untuk:

Ayahanda dan Ibundaku tercinta serta kakakku yang tiada henti memberiku semangat, doa, dorongan, nasehat, kasih sayang, dan pengorbanan. Guru dan Dosen tercinta. Sahabat dan teman yang selalu memberi semangat dan selalu siap membantu saya. Dan untuk Kampus tercinta "Universitas Negeri Makassar".

ABSTRAK

Iin Ayudhina Fajrin H, 2017. Pendekatan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dalam *Small Area Estimation*. Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar (dibimbing oleh Muhammad Nusrang dan Muhammad Kasim Aidid)

Penelitian ini mengkaji literatur yang berkaitan dengan metode *Small Area Estimation* (SAE). SAE dalam beberapa tahun terakhir telah menerima banyak perhatian, karena permintaan untuk statistik wilayah kecil dapat diandalkan. SAE merupakan konsep terpenting dalam pendugaan parameter secara tidak langsung di suatu area yang lebih kecil dalam sampel survei. Dalam SAE dibutuhkan beberapa informasi tambahan untuk melakukan pendugaan pada area kecil, informasi yang diperoleh memiliki karakteristik serupa dengan apa yang ingin diamati. Salah satu metode yang dikembangkan dalam SAE adalah EBLUP (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction*). Adapun tujuan yang ingin dicapai adalah untuk mengetahui hasil perbandingan pendugaan area kecil dengan menggunakan pendugaan langsung dan EBLUP. Berdasarkan hasil simulasi, diperoleh bahwa pendugaan area kecil dengan menggunakan metode EBLUP lebih baik dibandingkan dengan pendugaan langsung untuk $= 9,\ 64$ dan 144 dengan melihat nilai ARRMSE yang terkecil dan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa keunggulan metode EBLUP dapat digunakan untuk meningkatkan keakuratan pendugaan terhadap area kecil.

Kata kunci: Pendugaan langsung, SAE, EBLUP, ARRMSE

ABSTRACT

Iin Ayudhina Fajrin H, 2017. *Small Area Estimation* by using *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUB) approachment. Prodi Statistika, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, State University of Makassar, (Supervised by Muhammad Nusrang and Muhammad Kasim Aidid)

This research reviewing the literature which related to *Small Area Estimation* (SAE) Method. In resent years, SAE has receive a lot of attention, because it is dependable for statistics of small area.SAE is the most important concept for estimating the parameter in an area that smaller than sample in survey. SAE need some additional information to estimating small area. Information to be obtained have similar characteristic with what is obseved. One of the method developed by SAE is EBLUP (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction*). Wheter the goals to be achieved is to know the comparisson of small area estimation by using direct estimation and EBLUP. Base on simulation result, small area estimation by using EBLUP is better than direct estimation with $= 9,\ 64\ \mathrm{and}144$. By seing the smallest ARRMSE, it shows that the advantages of EBLUP method can be used to increase the accuration of estimation of small area.

Keywords: Direct Estmiation, SAE, EBLUP, ARRMSE

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu ‘Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirobbil ‘alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT, atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul “**Pendekatan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction (*EBLUP*)* dalam *Small Area Estimation*”**, sebagai salah satu syarat menyelesaikan studi di Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan dunia akhirat.

Terima kasih yang tak terhingga penulis hanturkan kepada Ayahanda H. Harling dan Ibunda Hj. Bahriah atas segala doa, kasih sayang, cinta, nasihat, motivasi, serta berbagai macam bantuan, baik secara moril maupun materil. Terima kasih atas bimbingan serta ketulusan dalam merawat penulis dari lahir hingga sekarang. Dan tak lupa terima kasih kepada kakakku serta keluarga atas segala dorongan dan bantuannya selama ini. Semoga Allah membalas semua kebaikannya dengan pahala yang berlipat ganda.

Iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Husain Syam, M.TP. selaku Rektor Universitas Negeri Makassar.

2. Bapak Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.
3. Bapak Prof. Drs. H. M. Arif Tiro, M.pd., M.Sc, Ph.D., Ketua Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.
4. Bapak Drs. Muhammad Nusrang, M.Si., selaku pembimbing I dan Bapak Muhammad Kasim Aidid S.Si., M.Si., selaku pembimbing II atas segala bimbingan dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Prof. Dr. dr. M. Nadjib Bustan, MPH., selaku penguji I dan Bapak Adiatma, S.Pd., M.Si., selaku Penguji II atas segala saran dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Kak Asfar, terima kasih atas bimbingannya dan bantuannya dalam menyelesaikan skripsi ini. Semoga apa yang diberikan senantiasa menjadi amal jariyah.
7. Bapak/Ibu dosen Prodi Statistika FMIPA UNM yang telah menyalurkan ilmunya secara ikhlas serta mendidik penulis. Semoga apa yang diberikan senantiasa menjadi amal jariyah.
8. Saudaraku tersayang Siti Hardianti Har, terima kasih atas doa dan semangat yang telah kau berikan.
9. Sahabat-sahabatku tersayang Firdaus, R. Akbar Awalul Zulhaj, Syamsul Bachri M, Yulfadzilah, Sri Marsela Ili, Tp. Nurhikma Seniwati MS, Bau Mantang Sapriana, Nurul Muchlisya Ichsan, Nur Ariska, Irfina Sari, Nurul

Khaerani, Asmira, Novy Afriyanthi, Magfirah Dizzania Maulani dan masih banyak lagi yang belum sempat saya sebutkan satu persatu. Terima kasih atas doa dan semangat yang telah kalian berikan.

10. Teman-teman seperjuangan Program Studi Statistika Angkatan 2013.

Penulis berharap tulisan yang sederhana ini dapat bermanfaat sebagai bahan bacaan bagi mahasiswa yang berminat dan dapat menjadi salah satu sumber referensi untuk melakukan penelitian yang berkaitan.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua elemen yang membantu, rekan-rekan yang tidak sempat kusebut namanya satu persatu, harap maklum atas keterbatasan ruang, waktu dan penulis sendiri. Semoga Allah SWT menerima amal kebaikan dan melimpahkan rahmatNya kepada kita semua, Amin ya Rabbal Alamin.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Makassar, 20 Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR ISTILAH

BP	: *Best Prediction* (Prediksi Terbaik)
BLUP	: *Best Linear Unbiased Prediction* (Prediksi Takbias Terbaik Linear)
EBLUP	: *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (Prediksi Takbias Terbaik Linear Empirik)
SAE	: *Small Area Estimation* (Pendugaan Area Kecil)
MLE	: *Maximum Likelihood Estimator* (Penduga Kemungkinan Maksimum)
MSE	: *Mean Square Error* (Kuadrat Tengah Galat)
Direct Estimation	: Pendugaan Langsung (Pendugaan parameter yang dilakukan hanya berdasarkan data survei pada masing-masing area)
Indirect Estimation	: Pendugaan Tidak Langsung (Pendugaan parameter yang dilakukan dengan melibatkan informasi tambahan baik dari dalam area yang menjadi perhatian, area lain maupun survei lain)

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Survei merupakan salah satu teknik yang dirancang untuk mengumpulkan suatu data dengan mengambil sampel dari suatu populasi. Survei sering dilakukan secara rutin baik di lembaga penelitian swasta maupun negeri. Survei rutin yang dilakukan oleh pemerintah suatu negara, umumnya didesain untuk memperoleh statistik nasional (Sadik, 2009). Artinya hasil pendugaan dari survei tidak tersedia pada tingkat area yang lebih kecil. Persoalan muncul ketika hasil survei digunakan untuk mencari informasi terhadap area yang lebih kecil dengan menggunakan metode pendugaan langsung akan memunculkan suatu masalah, karena pendugaan langsung tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup, sehingga statistik yang dihasilkan akan memberikan ragam yang sangat besar. Terdapat metode yang digunakan untuk mengatasi masalah tersebut yaitu metode pendugaan area kecil (*Small Area Estimation,* SAE).

SAE dalam beberapa tahun terakhir telah menerima banyak perhatian, karena permintaan untuk statistik wilayah kecil dapat diandalkan (Prasad dan Rao, 1990). SAE merupakan konsep terpenting dalam pendugaan parameter secara tidak langsung di suatu area yang lebih kecil dalam sampel survei. Dalam SAE dibutuhkan beberapa informasi tambahan untuk melakukan pendugaan pada area kecil, informasi yang diperoleh memiliki karakteristik serupa dengan apa yang ingin diamati (Kurnia dan Notodiputro, 2007). Dengan penambahan informasi dalam pendugaan area kecil dinamakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*). Terdapat beberapa macam pendekatan dalam SAE, yaitu: *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Empirical Bayes* (EB) dan *Hierarchical Bayes* (HB).

Pendekatan EBLUP merupakan metode yang dapat diterapkan pada model linear campuran yang mencakup banyak penggunaan pada pendugaan area kecil. Keunggulan dari pendekatan EBLUP adalah hasil pendugaan memiliki tingkat akurasi yang tinggi, meminimalkan *Mean Square Error* (MSE) di antara kelas pendugaan tak bias linear lainya (Rao, 2003) dan komponen ragam yang terdapat dalam model linear campuran tidak diketahui, sehingga terlebih dahulu dilakukan pendugaan terhadap komponen ragam tersebut (Saei dan Chambers, 2003). Dari penjelasan di atas, maka penulis dalam hal ini akan mengaplikasikan pendekatan (EBLUP) dalam melakukan pendugaa area kecil dan penelitian ini akan dilakukan simulasi agar mendapatkan hasil pendugaan terbaik berdasarkan nilai ARRMSE terkecil dari pendugaan langsung dan EBLUP dengan beberapa kondisi jumlah area.

B. Rumusan Masalah

Survei yang dilakukan oleh pemerintah suatu negara, umumnya didesain untuk memperoleh statistik nasional. Jika hasil survei digunakan untuk mencari informasi terhadap area yang lebih kecil dengan menggunakan metode pendugaan secara langsung tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup bila ukuran sampel berukuran kecil, sehingga statistik yang dihasilkan akan memiliki ragam yang sangat besar. Terdapat metode yang digunakan untuk mengatasi masalah tersebut yaitu metode *Small Area Estimation* (SAE) dengan menggunakan pendekatan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

C. Pertanyaan Penelitian

Adapun pertanyaan pada penelitian ini adalah bagaimana hasil perbandingan pendugaan area kecil dengan menggunakan pendugaan langsung, dan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)?

D. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil perbandingan pendugaan area kecil dengan menggunakan pendugaan langsung dan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini, yaitu:

1. Bagi penulis sendiri, dapat memperdalam ilmu tentang pendugaan area kecil.
2. Bagi para pembaca, dapat menambah pengetahuan tentang aplikasi pada ilmu statistik khususnya dengan menggunakan pendugaan area kecil.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Pendugaan Langsung (*Direct Estimation*)

Survei adalah metode pengumpulan data dengan mengambil sebagian objek populasi tetapi dapat mencerminkan populasi dengan memperhatikan keseimbangan antara jumlah peubah, akurasi, tenaga, waktu dan biaya. Pengumpulan data dengan metode survei memiliki banyak keuntungan, yaitu: menghemat biaya dalam pengumpulan data, pengumpulan dan penyajian data lebih cepat, cakupan peubah lebih luas dan akurasi lebih baik. Namun di satu sisi, pengumpulan data dengan survei memerlukan kerangka sampel dan tidak dapat menyajikan data wilayah kecil.

Tata cara pengambilan sampel dalam survei dibagi 2, yaitu:

1. Berpeluang (*probability sampling*)

   Setiap unit dalam populasi mempunyai kesempatan (peluang) untuk dipilih dalam sampel dan keseluruhan sampel yang dipilih dapat mewakili populasi.

2. Tidak berpeluang (*non probability sampling*)

   Metode penarikan sampel yang mengabaikan prinsip probabilita. Sampel yang dipilih didasarkan atas kriteria tertentu sesuai dengan tujuan penelitian.

Namun, secara umum teknik pengambilan sampel yang sering digunakan dalam survei adalah cara pengambilan dengan berpeluang, yaitu *simple random sampling* (sampel acak sederhana). Penarikan sampel acak sederhana adalah sebuah metode untuk memilih *n* unit dari *N* sehingga setiap elemen dari sampel yang berbeda mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Dalam praktek, penarikan sampel acak sederhana dipilih unit perunit. Unit-unit dalam populasi diberi nomor dari 1 sampai *N*. serangkaian bilangan acak antara 1 dan *N* kemudian dipilih, dengan cara menggunakan sebuah tabel bilangan acak atau dengan cara menggunakan sebuah program komputer yang menghasilkan tabel bilangan acak. Pada setiap penarikan, proses yang digunakan harus memberikan kesempatan terpilih yang sama untuk setiap bilangan dalam populasi. Unit-unit yang terpilih ini sebanyak *n* merupakan sampel (Cochran, 2015).

Tujuan pengambilan sampel survei adalah untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari informasi yang terdapat dalam sampel. Salah satu cara untuk membuat kesimpulan adalah menduga parameter populasi tertentu dengan menggunakan informasi sampel (Scheaffer *et al.*, 2006). Berikut ini merupakan rumus rata-rata sampel digunakan untuk menduga parameter populasi dan persamaannya sebagai berikut:

$$= \frac{\Sigma}{\quad} \tag{2.1}$$

dimana:

= pendugaan langsung area ke-*i*

= unit ke-*j* area ke-*i*

= ukuran sampel area ke-*i*

Pendekatan klasik untuk menduga parameter populasi berdasarkan desain sampling dan pendugaan yang dihasilkan dari pendekatan tersebut disebut pendugaan langsung. Data dari survei ini dapat digunakan untuk memperoleh pendugaan yang andal dari total dan rata-rata populasi suatu wilayah atau domain dengan sejumlah sampel besar. Namun, bila pendugaan langsung digunakan untuk area kecil, akan menyebabkan hasil pendugaan tidak akurat (Ghosh dan Rao, 1994).

Untuk mengukur seberapa baik penduga langsung dapat dicari dengan nilai *Mean Square Error* (MSE), yaitu dengan rumus:

$$\mathrm{MSE}(\quad) = - \tag{2.2}$$

dimana $= \frac{\quad}{\quad} \sum \quad -$ adalah ragam dari peubah terikat. Persamaan ini biasanya digunakan jika memakai teori penarikan sampel dengan maksud menganalisis ragam. Keuntungan yang diperoleh adalah hasilnya didapat dari bentuk yang lebih sederhana (Cochran, 2015).

B. Pendugaan Tidak Langsung (*Indirect Estimation*)

Sebagai sumber data biasanya sampel survei yang dirancang untuk menghasilkan statistik tingkat lebih besar atau lebih tinggi, ukuran sampel untuk area kecil biasanya kecil. Akibatnya, ragam yang terkait dari pendugaan ini kemungkinan besar tidak dapat memberikan pendugaan yang lebih akurat. Oleh karena itu, untuk menduga daerah-daerah kecil, perlu menggunakan metode pendugaan yang “meminjam informasi” dari daerah-daerah yang sedang diamati. Pendugaan ini sering disebut sebagai pendugaan tidak langsung karena mereka menggunakan nilai peubah survei (dan peubah pembantu) dari area kecil atau waktu lainnya, dan mungkin dari keduanya. Mereka meminjam informasi tambahan (data) dari area kecil lainnya (atau keduanya) dengan menggunakan model statistik baik berdasarkan model implisit maupun eksplisit yang menghubungkan area kecil terkait melalui informasi tambahan (Chandra, 2003).

C. Pendugaan Area Kecil (*Small Area Estimation,* SAE)

Penduga parameter yang bersifat kekar untuk suatu area kecil, saat ini merupakan tujuan penting bagi banyak badan dan penelitian dalam SAE. Area kecil tersebut didefinisikan sebagai himpunan bagian dari populasi dimana suatu peubah menjadi perhatian. Pendekatan klasik untuk menduga parameter area kecil ke-*i* ( ) didasarkan pada aplikasi model desain penarikan contoh (*design-based*), pendugaan tersebut kemudian disebut pendugaan langsung (*direct estimation*). Metode pendugaan tersebut menimbulkan dua permasalahan penting. *Pertama*, penduga yang dihasilkan merupakan penduga tak bias tetapi memiliki ragam yang besar karena diperoleh dari ukuran contoh yang kecil. *Kedua*, apabila pada suatu area kecil ke-*i* tidak terwakili di dalam survei, maka tidak memungkinkan dilakukan pendugaan secara langsung (Kurnia, 2009).

Adakalanya kita memiliki informasi tambahan yang dapat digunakan untuk pendugaan pada area kecil. Dalam beberapa kasus kita bisa memperoleh informasi tentang parameter yang menjadi perhatian dari area kecil lain yang memiliki karakteristik serupa, atau nilai pada waktu yang lalu, atau nilai dari peubah yang memiliki hubungan dengan peubah yang sedang diamati. Pendugaan paramater dan inferensinya yang menggunakan informasi tambahan tersebut, dinamakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation* atau *model-based estimation*). Metode dengan memanfaatkan informasi tambahan tersebut secara statistik memiliki sifat ”meminjam kekuatan” (*borrowing strength*) informasi dari hubungan antara peubah respon dengan informasi yang ditambahkan. Metode ini memiliki sejarah yang panjang tetapi baru mendapat perhatian dalam beberapa dekade terakhir untuk digunakan sebagai pendekatan pada pendugaan parameter area kecil (Kurnia, 2009).

Model Fay-Herriot merupakan model dasar bagi pengembangan pemodelan area kecil yaitu:

$$= \quad + \quad ; \quad = \quad + \qquad (2.3)$$

dimana dan saling bebas dengan $(\ ) = (\ ) = 0$ serta var( ) = dan var( ) = $(\ = 1, 2, \ldots,\ )$. adalah penduga langsung bagi area ke-i dan diperoleh dari data survei yang bersesuaian, merupakan parameter yang menjadi perhatian, adalah galat sampel, $= \quad , \quad , \ldots ,$ adalah peubah penjelas dan adalah pengaruh acak area (Kurnia, 2009).

Kurnia (2009) menyebutkan bahwa model pengaruh campuran Fay-Herriot yang dijabarkan oleh Russo *et al*. (2005) untuk level area adalah sebagai berikut:

1. $= \quad , \quad , \ldots ,$ vektor data pendukung (peubah penyerta).
2. $= \quad + \quad$ untuk $= 1, 2, \ldots ,$

   merupakan parameter yang menjadi perhatian dan diasumsikan memiliki hubungan dengan peubah penyerta pada (1) sedang pengaruh acak dengan nilai tengah nol dan ragam .
3. $= \quad +$

   penduga langsung untuk sub-populasi ke-*i* yang merupakan fungsi linear dari parameter yang menjadi perhatian dan galat contoh .

4. $= \quad + \quad +$ untuk $= 1, 2, \ldots,$

model tersebut terdiri dari pengaruh acak dan pengaruh tetap sehingga merupakan bentuk khusus dari model linear campuran dengan struktur peragam yang diagonal.

Model regresi merupakan upaya untuk membentuk model umum dan memanfaatkan kekuatan dan keakuratan pendugaan pada level populasi, sedangkan deviasi sub-populasi untuk menangkap keaksahan yang terjadi pada setiap sub-populasi dan bersifat acak. Dengan demikian jika kita hanya memanfaatkan informasi umum maka $=$, jika pengaruh umum dan lokal kita adopsi, diperoleh $= \quad +$.

Secara statistika model pada point ke- 4 di atas melibatkan pengaruh acak akibat desain penarikan contoh ( ) dan pengaruh acak pemodelan sub-populasi ( ). Model tersebut merupakan bentuk khusus dari model linear campuran. Salah satu sifat yang menarik dari model campuran adalah kemampuannya dalam menduga kombinasi linear dari pengaruh tetap dan pengaruh acak. Model campuran telah digunakan untuk meningkatkan akurasi pendugaan pada kasus area kecil berdasarkan data survei dan data sensus oleh Ghosh dan Rao (1994). Pada aplikasi ini, model campuran diturunkan dari konsep bahwa vektor nilai populasi terbatas merupakan realisasi dari populasi. Dalam kasus ini, pendugaan rataan area kecil ekuivalen dengan pendugaan dari perwujudan pengaruh acak area yang tidak diobservasi dalam model campuran untuk sebaran populasi yang dicari rataannya (Kurnia, 2009).

D. Model Pendugaan Area Kecil

Dalam pendugaan area kecil, ada dua tipe dasar yang digunakan menurut Rao (2003) dalam Asfar *et al.* (2016), yaitu:

1. Model Berbasis Level Area (*Basic Area Level Model*)

   Model level area merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $=$ $, \; , \dots ,$ dengan parameter yang akan diduga adalah yang diasumsikan mempunyai hubungan dengan dengan mengikuti model sebagai berikut:

   $$= \quad + \quad + \qquad\qquad = 1, 2, \dots , \tag{2.4}$$

   Dengan $= (\;, \;, \dots , \;)$ adalah vektor dari parameter yang bersifat tetap berukuran $\times 1,$ $=$ jumlah area kecil, $=$ pengaruh acak yang diasumsikan menyebar normal dan berdistribusi identik dan saling bebas (*iid*), yakni:

   $$(\;) = 0, \qquad\qquad (\;) =$$

   Untuk melakukan inferensi tentang populasi berdasarkan model (2.4), diasumsikan bahwa penduga langsung telah ada pada model dan tuliskan sebagai:

   $$= \quad + \qquad\qquad = 1, 2, \dots , \tag{2.5}$$

   Galat penarikan contoh berdistribusi saling bebas dengan:

   $$(\;|\;) = 0, \qquad\qquad (\;|\;) =$$

   Jika menggabungkan Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.5) maka diperoleh model:

$$= \quad + \quad + \quad , \qquad\qquad = 1, 2, \ldots , \tag{2.6}$$

Dengan asumsi bahwa $\sim \quad (0, \quad)$ saling bebas dengan $\sim \quad (0, \quad)$. Persamaan (2.4) merupakan bentuk khusus dari model linear campuran.

2. Model Berbasis Unit Level (*Basic Unit Level Model*)

   Model level unit merupakan suatu model dengan data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misalnya $=$ $(\quad , \ldots , \quad)$. Selanjutnya peubah perhatian dianggap berkaitan dengan mengikuti model regresi satu tahap sebagai berikut:

$$= \quad + \quad + \qquad\qquad = 1, 2, \ldots , \quad ; \quad = 1, 2, \ldots , \tag{2.7}$$

   Dengan asumsi bahwa $\sim \quad (0, \quad)$ saling bebas dengan $\sim \quad (0, \quad)$.

E. *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP)

Best Linear Unbiased Prediction (BLUP) awalnya dikembangkan dengan mengasumsikan bahwa komponen keragaman telah diketahui. Dalam praktenya, komponen keragaman sangat sulit untuk diketahui. Untuk itu diperlukan pendugaan terhadap komponen keragaman ini melalui data sampel. Model dasar dalam pengembangan pendugaan area kecil didasarkan pada bentuk model linear campuran sebagai berikut:

$$= \quad + \quad + \tag{2.8}$$

Dimana dan saling bebas serta $\sim \quad (0, \quad)$ dan $\sim (0, \quad)$ untu $=$ $1, 2, \ldots ,$. Selanjutnya kita perhatikan kasus dimana dan tidak diketahui, tetapi $(\ = 1, 2, \ldots , \ )$ diasumsikan diketahui (Kurnia, 2009).

Penduga terbaik (*Best Prediction,* BP) bagi $=\quad+$ berdasarkan persamaan (2.8) dengan meminimumkan *mean square error* jika dan diketahui adalah

$$=\ (\ |\ ,\ )=\quad+(1-\ ) \tag{2.9}$$

dimana $=\frac{\quad}{(\quad)}$

Untuk mengukur seberapa baik pendugaan BP maka akan dicari nilai *Mean Square Error* (*MSE*), yaitu dengan rumus:

$$\mathrm{MSE}\quad=\frac{\quad}{(\quad)}=\ (\ ) \tag{2.10}$$

Misalkan $=\ ,\ ,\dots,\ \ ,\ =\ ,\ ,\dots,$ dan $=\ (\ +\ ,\ +\ ,\dots,\ +\ )$. Jika diketahui, dapat diduga dengan metode Maksimum Likelihood Estimasi (MLE), yaitu:

$$\log\ (\ ,\ |\ )=--\ \ |\ |--(\ -\ )\ \ (\ -\ )$$

$$=(\qquad) \tag{2.11}$$

Dengan mensubtitusi oleh pada persamaan (2.10), maka diperoleh

$$=\qquad,\quad=\quad+(1-\ ) \tag{2.12}$$

Menurut Ghosh dan Rao (1994) dalam Kurnia (2009), MSE dari pendugaan BLUP dapat dihitung dengan rumus:

$$\mathrm{MSE}\qquad=\ (\ )+\ (\ ) \tag{2.13}$$

dimana:

$$(\ )=\frac{\tau}{(\ +\ )}$$

$$(\ )=\frac{(\ )}{(\ +\ )}[\ \ (\qquad)\ \ ]$$

F. *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) merupakan metode yang telah banyak digunakan dalam menghasilkan pendugaan untuk daerah yang lebih kecil atau statistik daerah kecil (Datta dan Lahiri, 2000). Metode EBLUP juga merupakan metode yang dikembangkan dari metode BLUP. Dalam EBLUP menggantikan komponen keragaman yang tidak diketahui ini dengan menduganya terlebih dahulu (Saei and Chambers, 2003). Dalam metode BLUP varian pengaruh acak ( ) diasumsikan diketahui dan tidak diketahui. Namun, dalam EBLUP baik maupun biasanya tidak diketahui sehingga untuk kasus pendugaaan $= \quad +$ dengan BLUP maka terlebih dahulu harus diduga. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode Maximum Likelihood Estimasi (MLE). Pendugaan dapat dilakukan dengan menggunakan metode MLE terdapat pada persamaan (2.11) dan pendugaan ragam pengaruh acak ( ) dengan metode MLE didapatkan pada persamaan iterasi Newton Raphson (Rao, 2003) sebagai berikut:

$$(\quad) = (\,) + (\,(\,)) \quad (\,), \quad (\,) \qquad (2.14)$$

dimana:

$$= 0, 1, 2, \ldots$$

$$(\quad) = -\Sigma \quad \frac{}{}$$

$$(\,), \quad = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{(\quad + \quad)} + \frac{1}{2} \quad \frac{-}{(\quad + \quad)}$$

Kemudian nilai $(\quad)$ dapat diambil sebagai penduga dari $\hat{}$ jika nilai $(\quad) = (\,)$. dengan mensubtitusi oleh $\hat{}$ terhadap penduga BLUP

( ) pada Persamaan (2.10), maka diperoleh suatu bentuk penduga baru, yaitu:

$$= \quad , \hat{} = \quad + (1 - \quad) \qquad (2.15)$$

Untuk mengukur seberapa baik penduga EBLUP maka akan dicari nilai *Mean Square Error* (MSE). $= (\quad - \quad) =$, dapat diperoleh dengan menguraikan $(\quad - \quad)$ menjadi $- \quad + (\quad -$ $)$. dengan menerapkan kaidah umum $- \quad + (\quad - \quad) = 0$, maka diperoleh $= \quad +$, dengan $= (\quad - \quad)$ dan $=$ $-$. Lebih lanjut $= \quad =$ dan adalah konstribusi terhadap MSE karena pendugaan parameter model. Melalui dekomposisi deret Taylor diperoleh $= \quad (\quad) + \quad (\quad)$, dengan $(\quad)$ adalah kontribusi terhadap MSE akibat pendugaan dan $(\quad)$ adalah kontribusi terhadap MSE akibat pendugaan . Ketika asumsi-asumsi dipenuhi, Prasad dan Rao (1990) dalam Kurnia (2009) memberikan suatu pendekatan penduga yang tak bias bagi dan sebagai berikut $= \quad (\hat{}) + \quad (\hat{})$ dan $= \quad (\hat{}) +$ $(\hat{})$.

Dengan demikian penduga bagi sebagai berikut:

$$= \quad + \quad = \quad (\hat{}) + \quad (\hat{}) + \quad (\hat{}) \qquad (2.16)$$

dimana:

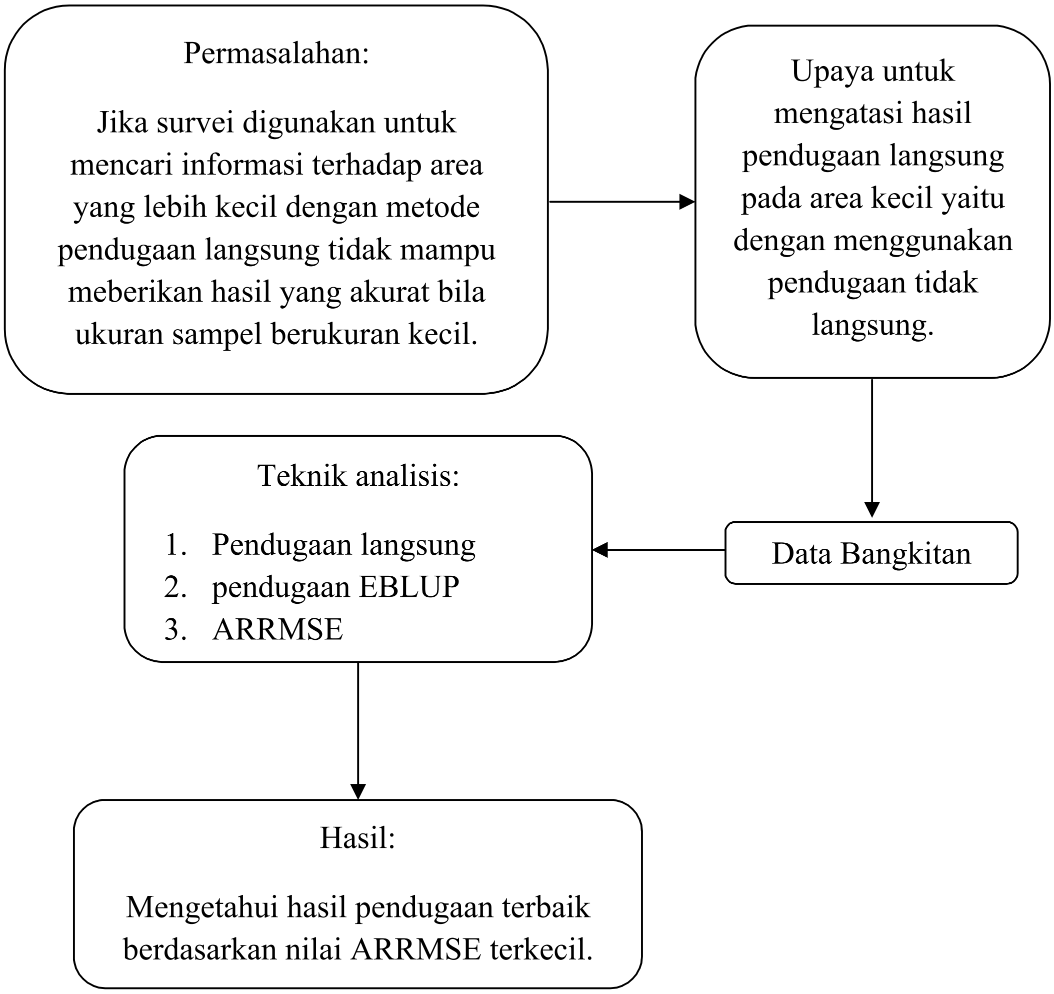
$$(\hat{}) = (1 - \quad) \hat{}$$

$$(\hat{}) = \frac{(\quad)}{(\hat{} + \quad)} [\quad (\quad) \quad]$$

$$(\ \hat{}\ ) = \frac{2(\quad)}{(\ \hat{}\ + \quad)}$$

G. Kerangka Pikir

Survei merupakan teknik pengumpulan data yang secara rutin dilakukan oleh pemerintah suatu negera yang hanya didesain pada tingkat nasioanal, sehingga pendugaan yang dihasilkan hanya pada tingkat nasional. Jika hasil survei digunakan untuk mencari informasi terhadap area yang lebih kecil dengan menggunakan metode pendugaan secara langsung tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup bila ukuran sampel berukuran kecil, sehingga statistik yang dihasilkan akan memiliki ragam yang sangat besar. Salah satu upaya yang digunakan untuk mengatasi hal tersebut yaitu dengan melakukan pendugaan tidak langsung. Data yang digunakan dalam melakukan pendugaan area kecil yaitu data bangkitan dengan beberapa kondisi area, dengan $= 9, 64$ dan 144 dimana 9 mewakili area kecil, 64 mewakili area sedang dan 144 mewakili area besar. Kemudian diolah dengan menggunakan pendugaan langsung dan metode EBLUP dengan tujuan untuk mendapatkan nilai dugaan ARRMSE, kemudian nilai dugaan ARRMSE yang diperoleh akan dibandingkan untuk mengetahui manakah pendugaan tersebut yang memberikan hasil pendugaan terbaik.



Gambar 2.1 Bagan kerangka pikir

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data yang dibangkitkan dengan kondisi jumlah area ditentukan dan sebaran data yang dibangkitkan. Jumlah area yang ditetapkan sebanyak $= 9, 64$ dan 144. adalah peubah penjelas, adalah sampling error dan adalah peubah acak dari dimana masing-masing dibangkitkan secara acak dan diasumsikan menyebar normal.

B. Teknik Analisis Data

Kajian simulasi dilakukan untuk mengetahui hasil pendugaan terbaik dari pendugaan langsung dan EBLUP. Desain simulasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan ukuran *m* area yang dicobakan yaitu 9, 16 dan 144.
2. Menentukan ukuran amatan di tiap area kecil secara *uniform*.
3. Mensimulasikan ini menggunakan satu peubah yang menjadi perhatian (y) dan satu peubah penjelas $\boldsymbol{x}$. Model yang digunakan untuk memperoleh nilai peubah yang menjadi perhatian (y) untuk area kecil ke-i dan unit ke-j adalah sebagai berikut

$$= \quad + \quad + \quad , \qquad = 1, 2, \dots , \quad , \qquad = 1, 2, \dots , 9 \tag{3.1}$$

dimana adalah peubah penyerta, adalah pengaruh acak area dan adalah galat penarikan sampel.

a. Membangkitkan peubah acak yang menyebar normal $\sim (3, 5)$. Nilai yang diperoleh digunakan untuk seluruh skenario pada proses simulasi.

b. Menetapkan nilai $= (10, 4)$ sehingga persamaan (3.1) menjadi:

$$= 10 + 4 \quad + \quad + \quad , \qquad = 1, 2, \dots , \quad , \qquad = 1, 2, \dots , 9$$

c. Membangkitkan nilai $= (\;,\; , \dots , \;)$ dengan menyebar multivariate normal MVN(,) dengan $=$ merupakan maktriks ragam-peragam yang berukuran $\times$ dengan $= 3$.

d. Membangkitkan nilai $= \; , \; , \dots ,$ yang menyebar normal $\sim (0, (1{,}34))$.

4. Menghitung nilai tengah peubah bebas sampel di tiap area kecil dengan rumus:

$$= \frac{1}{\;} \qquad , \text{untuk} \quad = 1{,}2, \dots ,10, \qquad = 1{,}2, \dots , \tag{3.2}$$

5. Menghitung nilai tengah peubah terikat untuk sampel di tiap area kecil sebagai penduga langsung, dengan rumus:

$$= \frac{1}{\;} \qquad , \text{untuk} \quad = 1{,}2, \dots ,10, \qquad = 1{,}2, \dots , \tag{3.3}$$

6. Menghitung nilai ragam dari peubah terikat dengan rumus:

$$= \frac{\;}{\;} \sum \qquad - \qquad , \text{untuk} \quad = 1{,}2, \dots ,10, \qquad = 1{,}2, \dots , \tag{3.4}$$

kemudian dibagi dengan untuk mendapatkan ragam yang akan digunakan dalam pendugaan EBLUP.

7. Mencari nilai untuk model level area dengan menggunakan informasi .
8. Membangkitkan aktual.
9. Mengulangi langkah (2) sampai langkah (7) sebanyak B = 1000 iterasi sehingga dapat dihitung nilai *relative root mean square error* (RRMSE) dan *average relative root mean squares error* (ARRMSE) dari hasil pendugaan parameter pada setiap area dengan rumus sebagai berakut:

$$\mathrm{RRMSE}_{(\ )} = \left[\frac{1}{\ } \sqrt{\frac{1}{\ } \quad - \quad} \right] \times 100\ \% \tag{3.5}$$

$$\mathrm{ARRMSE} = \frac{1}{\ } \quad {}_{(\ )} \tag{3.6}$$

Keterangan:

a. adalah parameter pada area kecil ke-*i*.

b. adalah penduga area kecil pada area kecil ke-*i* dan iterasi ke-*l*.

c. adalah banyaknya iterasi, dalam penelitian ini B = 1000.

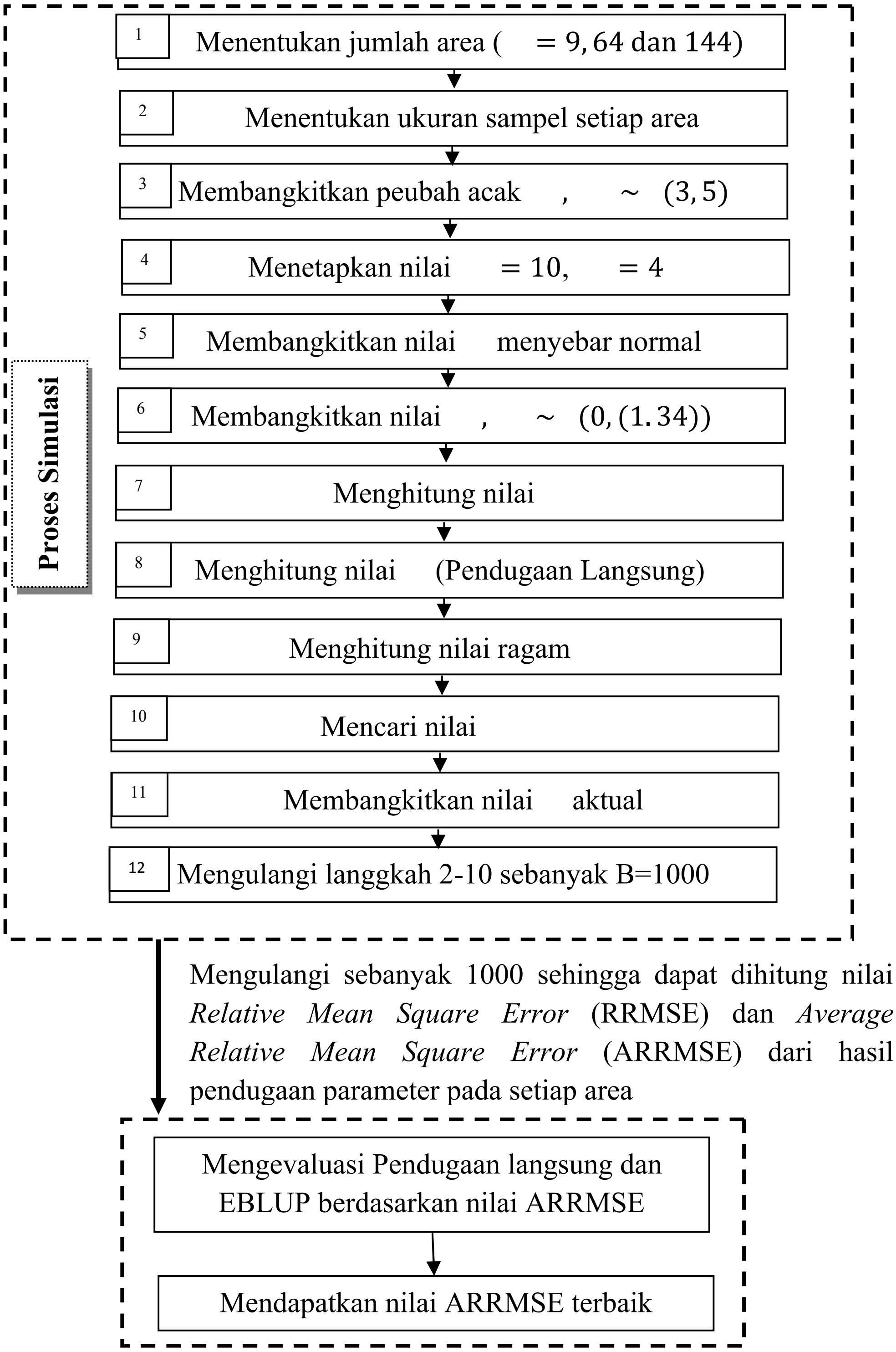
d. (MSE) adalah nilai harapan dari kuadrat selisih antara penduga dengan parameternya. Secara formulasi, kuadrat tengah galat mengandung dua komponen, yakni ragam penduga dan bias. Ragam penduga untuk mengukur presisi. Presisi yang dimaksudkan dalam hal ini adalah ukuran sejauh mana pengulangan suatu pendugaan akan memberikan hasil yang sama. Semakin kecil nilai dari kuadrat tengah galat maka kombinasi antara ragam penduga dan bias semakin kecil. Ragam penduga dan bias semakin kecil menunjukkan presisi dan akurasi dari suatu pendugaan semakin baik.

e. $\mathrm{RRMSE}_{(\ )}$ adalah *relative root mean squares error* pada area ke-*i*.

f. ARRMSE adalah *average relative root mean squares error.*

10. Mengulangi langkah (2) sampai langkah (9) untuk $= 64$ dan 144.

11. Melakukan evaluasi membandingkan dengan nilai ARRMSE dari pendugaan langsung dan pendugaan EBLUP untuk masing-masing anggota area.



Gambar 3.1 Diagram alir dan alur penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menggunakan simulasi untuk mengkaji pendugaan manakah yang memberikan hasil pendugaan terbaik. Untuk melihat pendugaan terbaik yaitu dengan melihat nilai ARRMSE dari tiap-tiap area setelah dilakukan pengulangan sebanyak 1000 kali. Jumlah area yang disimulasikan ada 3 jenis, yaitu $= 9,$ 64 dan 144, dengan tujuan agar jumlah area sedikit, sedang dan banyak terwakili.

Peneliti mengaku bahwa mensimulasikan penelitian ini cukup tidak mudah, karena dalam penelitian ini dilakukan dengan cara membangkitkan data yang akan disimulasikan, yaitu: , dan dan data yang dibangkitkan akan dianalisis lebih lanjut menggunakan pendugaan langsung dan pendugaan tidak langsung. Berdasarkan hasil simulasi pendugaan area kecil inilah peneliti dapat menentukan hasil pendugaan yang terbaik berdasarkan nilai ARRMSE yang telah diperoleh. ARRMSE merupakan indikator yang digunakan untuk mengevaluasi kebaikan pendugaan selain dengan menggunakan nilai MSE. Pendugaan dengan nilai ARRMSE terkecil dapat dikatakan pendugaan terbaik.

A. Hasil Simulasi Y Aktual, Y Langsung dan

Setelah melakukan simulasi dengan 1000 kali pengulangan maka didapatkan nilai hasil simulasi dari $= 9,\ 64$ dan 144. Berikut ini adalah nilai Y actual, nilai Y langsung dan nilai . Dari hasil yang diperoleh tersebut:

Tabel 4.1 Nilai Y aktual, Y Langsung dan

Area	Jumlah area	Y aktual	Y langsung	
Kecil	1	17,288	21,988	21,919
	2	21,797	21,828	21,753
	3	24,480	22,005	21,957
	⋮	⋮	⋮	⋮
	7	19,635	22,335	22,156
	8	23,109	22,219	22,125
	9	22,391	22,234	22,199
Sedang	1	22,392	21,884	21,827
	2	21,126	21,979	21,901
	3	21,720	21,675	21,604
	⋮	⋮	⋮	⋮
	62	26,980	21,875	21,811
	63	24,824	22,015	21,851
	64	23,645	22,124	22,094
Besar	1	23,271	22,009	21,965
	2	25,983	21,646	21,622
	3	31,947	21,974	21,951
	⋮	⋮	⋮	⋮
	142	22,320	22,138	22,026
	143	19,842	21,962	21,876
	144	25,555	21,992	21,862

B. Perbandingan ARRMSE Pendugaan Langsung dan EBLUP

Berikut ini adalah nilai RRMSE bagi penduga lansung dan EBLUP yang diperoleh dari simulasi untuk $= 9,\ 64$ dan 144. Berdasarkan hasil yang diperoleh dari Tabel 4.2, selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai ARRMSE .

Tabel 4.2 Nilai RRMSE pendugaan langsung dan EBLUP

Area	Jumlah area	RRMSE Langsung	RRMSE EBLUP
	1	34,628	32,893
	2	16,766	14,982
	3	17,808	16,786
Kecil	⋮	⋮	⋮
	7	23,021	21,039
	8	16,892	15,536
	9	16,493	14,992
	1	16,897	15,187
	2	17,135	15,303
	3	17,323	15,211
Sedang	⋮	⋮	⋮
	62	23,562	22,618
	63	18,661	18,102
	64	17,320	15,915
	1	17,020	15,016
	2	21,863	20,997
	3	33,016	32,742
Besar	⋮	⋮	⋮
	142	16,056	14,526
	143	21,740	19,656
	144	20,245	19,511

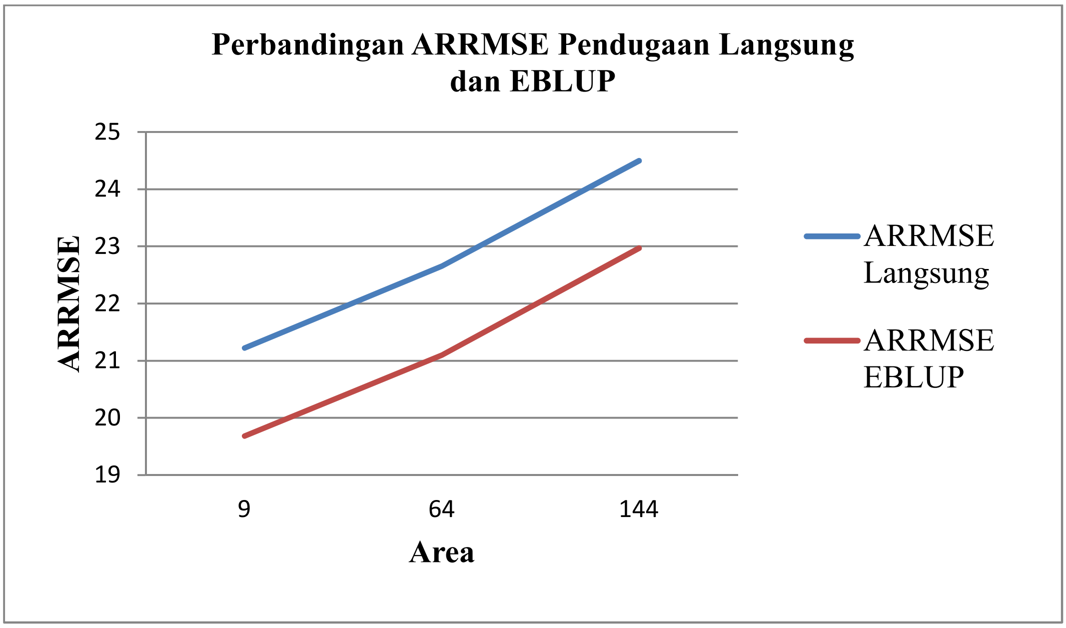
Berikut ini adalah nilai ARRMSE bagi penduga lansung dan EBLUP yang diperoleh dari simulasi untuk $= 9,\ 64$ dan 144 dengan menggunakan persamaan 3.6. Berdasarkan hasil yang diperoleh tersebut pada Tabel 4.3, selanjutnya dilakukan evaluasi kebaikan masing-masing dugaan dalam memberikan pendugaan area kecil yang optimum.

Tabel 4.3 Perbandingan ARRMSE hasil pendugaan langsung dan EBLUP

Pendugaan	Area		
	9	64	144
Langsung	21,222	22,656	24,500
EBLUP	19,681	21,097	22,968

Berdasarkan nilai ARRMSE yang dihasilkan dari semua area pada Tabel 4.3 dapat dilihat bahwa nilai ARRMSE untuk 9 area pada pendugaan langsung adalah 21,222 dan EBLUP adalah 19,681 menunjukkan bahwa nilai ARRMSE EBLUP lebih kecil dari nilai ARRMSE pendugaan langsung. ARRMSE untuk 64 area pada pendugaan langsung adalah 22,656 dan EBLUP adalah 21,097 menunjukkan bahwa nilai ARRMSE EBLUP lebih kecil dari nilai ARRMSE pendugaan langsung. ARRMSE untuk 144 area pada pendugaan langsung adalah 24,500 dan EBLUP adalah 22,968 menunjukkan bahwa nilai ARRMSE EBLUP lebih kecil dari nilai ARRMSE pendugaan langsung. Sehingga dari hasil di atas terlihat jelas bahwa nilai ARRMSE untuk area kecil, sedang dan besar dari pendugaan EBLUP jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARRMSE pendugaan langsung. Hal ini mengindikasikan bahwa pendugaan dengan metode EBLUP dapat memperbaiki pendugaan parameter yang diperoleh dengan menggunakan metode pendugaan langsung. Sehingga pendugaan dengan metode

EBLUP merupakan pendugaan yang terbaik dibandingkan dengan metode pendugaan langsung. Selain mendapatkan hasil dari Tabel 4.3 di atas, nilai perbandingan pendugaan dapat dilihat dengan grafik yang terdapat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Grafik perbandingan ARRMSE pendugaan langsung dan ARRMSE EBLUP

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat dilihat bahwa grafik tersebut menunjukkan bahwa semakin besar area yang digunakan maka semakin besar pula nilai ARRMSEnya, namun hasilnya tetap menunjukkan bahwa ARRMSE EBLUP lebih kecil dari ARRMSE pendugaan tidak langsung. Hal ini sejalan dengan penelitian Kurnia *et al.* (2009), Asfar *et al.* (2016) bahwa pendugaan tidak langsung dengan metode EBLUP memiliki tingkat akurasi yang baik dalam pendugaan area kecil. Untuk penelitian terapan sejalan dengan Matualage (2012) bahwa pendugaan tidak langsung dengan metode EBLUP memiliki tingkat akurasi yang baik dalam pendugaan area kecil.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa pendugaan tidak langsung dengan metode EBLUP menghasilkan nilai pendugaan yang lebih baik dibandingkan pendugaan langsung untuk $= 9,\ 64$ dan 144 dengan melihat nilai ARRMSE yang terkecil.

B. Saran

Adapun saran yang dapat diberikan untuk pengembangan dalam penelitian selanjutnya yaitu sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini, simulasi dilakukan dengan menggunakan metode EBLUP, sehingga penelitian selanjutnya disarankan untuk melanjutkan dengan metode Spasial EBLUP (SEBLUP) yang telah memperhitungkan pengaruh spasial pada area kecil.
2. Bagi para peneliti selanjutnya, dapat melakukan penelitian dengan menggunakan data yang telah tersedia (data sekunder).

DAFTAR PUSTAKA

Asfar., Kurnia, K., & Sadik, K. (2016). Optimum spatial weighted in small area estimation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics,* 3977-3989.

Chandra, H. (2003). Overview of small area estimation techniques. *Indian Agricultural Statistics Research Institute*, 75-88.

Cochran, W. G. (2015). *Teknik penarikan sampel.* Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia (UI-Press)

Datta, G. S., & Lahiri, P. (2000). A unified measure of uncertainty of estimated best linear unbiased predictors in small area estimation problems. *Statistica Sinica,* 613-627

Ghosh, N., & Rao, J. N. K. (1994). Small area estimation: An appraisal. *Statistical Science 9,* pp. 55-93.

Kurnia, A. (2009). Prediksi terbaik empirik untuk model transformasi logaritma di dalam pendugaan area kecil dengan penerapan pada data susenas [Disertasi]. Bogor: Program Pasca Sarjana, Institut Pertanian Bogor.

Kurnia, A., & Notodiputro, K. A. (2007). EB-EBLUP MSE estimator on small area estimation with aplication to BPS Data.

Kurnia, A., & Notodiputro, K. A. (2007). Pendekatan generalized additive mixed models. *Journal Sains MIPA*, 145 - 151.

Matualage, D. (2012). Metode prediksi tak bias linier terbaik empiris spasial pada area kecil untuk pendugaan pengeluaran per kapita (studi kasus: kabupaten jember provinsi jawa timur) [Tesis]. Bogor: Program Pasca Sarjana, Institut Pertanian Bogor.

Prasad, N. G. N., & Rao, J. N. K. (1990). The estimation of the mean squared error of small-area estimation. *of the American Statistical Association*, 163-171.

Rao, J. N. K. (2003). *Small area estimation.* New York: Jhon Willey and Sons.

Sadik, K. (2009). Metode Prediksi tak-bias linear terbaik dan bayes berhirarki untuk pendugaan area kecil berdasarkan model *state space* [Disertasi]. Bogor: Program Pasca Sarjana, Institut Pertanian Bogor.

Saei, A., & Chambers, R. (2003). Small area estimation: A review of methods based on the application of mixed models. *S3RI Methodology Working Paper M03/16.*

Sceaffer, R. L., Mendenhall, W. III., & Ott, R. L. (2006). *Elementary survey sampling.* America: Thomson.

LAMPIRAN

LAMPIRAN RUMUS

A. Pendugaan Parameter EBLUP dengan Metode MLE

Dengan metode MLE, diperlukan fungsi *likelihood* yang merupakan pdf dari . Namun, terlebih dahulu akan dicari mean dan ragam dari , yaitu:

$$(\ ) = \quad + \quad +$$

$$= \quad + \ (\ ) + \ (\ )$$

$$= \quad + 0 + 0 \text{ ; karena } (\ ) = 0 \text{ dan } (\ ) = 0$$

$$=$$

$$(\ ) = \quad - \quad (\ - \quad)$$

$$= \ (\ + \ )(\ + \ )$$

$$= \ (\ + \ )(\ + \ )$$

$$= \quad + \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad +$$

$$= \ + 0 + 0 +$$

$$= \ +$$

Karena dan berdistribusi normal, maka juga berdistribusi normal, sehingga dapat ditulis sebagai $\sim \quad , (\ + \ )$. sedangkan pdf yaitu:

$$(\ | \ , \ ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad —(\quad) \ (\quad)$$

Fungsi *likelihood* yang diperoleh dari fungsi distribusi peluang gabungan di atas sebagai berikut:

$$(\; , \; | \;) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad —(\quad) \; (\quad)$$

Untuk memperoleh estimasi parameter adalah dengan cara memaksimumkan fungsi log-*likelihood* dengan cara menurunkannya terhadap

$$\log \; (\; , \; | \;) = -- \quad | \; | -- (\; - \quad) \quad (\; - \quad)$$

$$\frac{\log \; (\; , \; | \;)}{} = -\frac{1}{2} \frac{(\; - \quad) \quad (\; - \quad)}{}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(\qquad - 2 \qquad + }{}$$

$$= -- (-2 \qquad + 2 \qquad) = 0$$

Maka

$$=$$

$$= (\qquad)$$

Dari hasil penyederhanaan persamaan di atas secara aljabar, menghasilkan penaksiran untuk , yaitu:

$$= (\qquad)$$

B. Menduga Pengaruh Acak ( )

Dengan metode MLE, diperlukan fungsi *likelihood* yang merupakan pdf dari . Namun, terlebih dahulu akan dicari mean dan ragam dari , yaitu:

$$= \qquad + \quad +$$

$$= \qquad + \; (\;) + \; (\;)$$

$$= \qquad + 0 + 0 \; ; \text{karena} \; (\;) = 0 \text{ dan } (\;) = 0$$

$$=$$

$$= \quad - \quad (\quad - \quad)$$

$$= \quad (\quad + \quad)(\quad + \quad)$$

$$= \quad (\quad + \quad)(\quad + \quad)$$

$$= \quad + \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad +$$

$$= \quad + 0 + 0 +$$

$$= \quad +$$

Karena dan berdistribusi normal, maka juga berdistribusi normal, sehingga dapat ditulis sebagai $\sim \quad , (\quad + \quad)$. Sedangkan pdf yaitu:

$$(\; , \; ; \;) = (\;)$$

$$= \frac{1}{(2 \;) \quad (\quad + \quad)} \exp \; -\frac{1}{2} \; (\quad - \quad) \quad + \quad ^{-} \quad -$$

Untuk memudahkan perhitungan, akan digunakan fungsi *log-likelihood*, yaitu:

$$, \; ; \quad = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \quad + \quad + (\quad - \quad) \quad + \quad ^{-} \quad -$$

Selanjutnya, fungsi *log-likelihood* tersebut diturunkan terhadap , dinotasikan (,), sehingga untuk differensial terhadap elemen ke-*j* diperoleh formula:

$$, \quad = \frac{\ln \; (\; , \; ; \;)}{}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \quad + \quad + (\quad - \quad) \quad + \quad ^{-} \quad -}{}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\ln(2\pi)}{} - \frac{1}{2}\frac{\ln \quad +}{} - \frac{1}{2}\frac{(\quad - \quad) \quad + \quad ^{-} \quad -}{}$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \quad \text{ln} \quad + \qquad - \frac{1}{2}\left[\frac{(\; - \;) \quad + \quad ^{-} \quad -}{} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\; + \;)} - \frac{1}{2} (\; - \;) \quad - \frac{1}{((\; + \;)} \frac{((\; + \;)}{} (\; - \;)$$

$$=1$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\; + \;)} + \frac{1}{2}\frac{(\; - \;) \quad -}{(\; + \;)}$$

Berdasarkan prosedur metode *maximum likelihood,* akan dicari solusi dari persamaan berikut:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{+} = \frac{1}{2}\frac{(\; - \;) \quad -}{+}$$

Berdasarkan persamaan tersebut, terlihat bahwa tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, taksiran kemudian diselesaikan secara numerik, yaitu dengan cara iterasi newton rapson:

$$(\;) = (\,) + (\,) \quad ((\,), \; (\,))$$

(Rao, 2003) dimana

$$I(\;) = \frac{\text{ln} \quad , \; ^2;}{2 \quad 2}$$

$$= \frac{}{2} \; \frac{\text{ln} \quad , \; ^2;}{2}$$

$$= \frac{}{2} \; - - \frac{}{^2 + \; ^2} + - \frac{(\qquad)}{^2 + \; ^2}$$

$$= - - \frac{}{2} \; \frac{}{^2 + \; ^2} \; + - \frac{}{2} \; \frac{(\qquad)}{^2 + \; ^2}$$

$$= - - \; - \frac{}{^2 + ^2} \; + - \frac{}{^2} \; \frac{(}{^2 + ^2}$$

$$= - \frac{}{^2 + ^2}$$

dan

$$, \quad = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\; + \;)} + \frac{1}{2}\frac{(\; - \;)^2}{(\; + \;)}$$

C. Metode BLUP pada Model Fay-Herriot

Pada metode BLUP, diasumsikan bahwa ragam pengaruh acak ( ) diketahui. Dalam hal ini, dimisalkan yang akan ditaksir pada model Fay-Herriot adalah kombinasi linear $\; + \;$, dengan $= \; \vdots \;$, berukuran $\times 1$, dan berukuran 1×1. Misalkan $\; = \; + \;$ adalah sembarang penaksir kombinasi linear $\; + \;$, dimana merupakan elemen dari vektor $= \; \vdots$ dengan $= 1,2, \dots,$ dan *c* suatu konstanta.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa sembarang penaksir $\; = \; + \;$ tersebut merupakan penaksir *best,* linear, dan *unbiased.* Berikut akan diuraikan masing-masing sifat tersebut.

1. Linear

Akan ditunjukkan bahwa penaksir = + bersifat linear. dikatakan penaksir yang linear, jika + = + , sehingga:

$$+ \quad = \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad ; \text{dengan} \quad = — \text{ dan } \quad = —$$

$$= \quad + \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad (l \quad _2 + \quad _2)$$

$$= \quad (\quad) + \quad (\quad)$$

2. *Unbiased*

Akan ditunjukkan bahwa bersifat *unbiased*. dikatakan bersifat *unbiased* jika = (+)

Bukti:

Diketahui: = +

$$= \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad (\;)$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad (\;)$$

$$= \quad + \quad (\quad) + \quad (\quad) + \quad (\;)$$

$$= \quad + \quad (\;) + \quad (\;) + \quad (\;)$$

$$= \quad + \quad (0) + \quad (0) + \quad ; \text{karena} \quad (\;) = 0 \text{ dan } \quad (\;) = 0$$

$$= \quad + \quad \text{(ii)}$$

$(\quad + \quad) = \quad (\quad) + \quad (\quad)$

$= \quad + 0$; karena $\quad (\quad) = 0$

$= \quad$ (iii)

Berdasarkan persamaan (ii) dan (iii), terlihat bahwa bersifat *biased* karena $\neq \quad +$. Berikut akan ditunjukkan bahwa jika $= 0$ dan kombinasi linear dari baris-baris , yaitu $=$, maka

$= \quad +$

$= \quad +$

$= \quad + \quad + \quad + 0$; karena $= 0.$

$= \quad (\quad + \quad + \quad)$

$= \quad + \quad (\quad) + \quad (\quad)$

$= \quad + \quad (\quad) + \quad (\quad)$

$= \quad + \quad (0) + \quad (0)$; karena $(\quad) = 0$ dan $(\quad) = 0$

$=$

$=$; karena $=$

Dengan demikian, jika $= 0$ dan kombinasi linear dari baris-baris , yaitu $=$, maka bersifat *unbiased* terhadap $+$. Selanjutnya, $=$ ini akan digunakan sebagai penaksir untuk $+$.

3. Terbaik (*best*)

Penaksir T dikatakan bersifat *best* jika T memiliki MSE terkecil diantara penaksir *unbiased* dan linear lainnya (Rao, 2003). Didefinisikan $(\quad - (\quad + \quad))$ sebagai MSE dari T .

Akan ditunjukkan bahwa $(\quad - (\quad + \quad))$ minimum terhadap kendala $\quad - \quad = 0$. Kemudian akan digunakan metode *Lagrange* untuk meminimumkan MSE dari T terhadap satu kendala. Namun, sebelumnya akan didefinisikan fungsi-fungsi berikut:

$$T \quad - (\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad - (\quad + \quad)$$

$$= \quad + \quad + \quad - \quad -$$

$$= \quad - \quad + \quad (\quad + \quad) -$$

$$= (0) \quad + \quad (\quad + \quad) - \quad ;\text{karena} \quad - \quad = 0$$

$$= \quad (\quad + \quad) - \qquad \textbf{(v)}$$

$$= (\quad + \quad) \quad -$$

$$= (\quad + \quad) \quad - \qquad \textbf{(vi)}$$

MSEnya diperoleh dengan:

$$(\quad - (\quad + \quad)) = \quad - (\quad + \quad - (\quad + \quad)$$

$$= \quad (\quad + \quad) - \quad ((\quad + \quad) \quad - \quad)$$

$$= \quad (\quad + \quad)(\quad + \quad) - (\quad (\quad + \quad) \quad - \quad (\quad + \quad) \quad +$$

$$= \quad (\quad + \quad)(\quad + \quad) \quad - \quad (\quad + \quad) \quad - \quad [\quad (\quad + \quad) \quad]$$

$$+ \quad [\quad]$$

Berikut akan dijelaskan lebih lanjut.

(1) $(\ + \ )(\ + \ )$

$= [(\ + \ )(\ + \ )]$

$= [\ + \ + \ + \ ]$

$= \{ [\ ] + [\ ] + [\ ] + [\ ]\}$

$= (\ + 0 + 0 + \ )$; karena $[\ ] =$ dan $[\ ] =$

$= (\ + \ )$

(2) $(\ + \ )$

$= [(\ + \ ) \ ]$

$= [(\ + \ )]$

$= \{ [\ ] + [\ ]\}$

$= (\ + 0)$; karena $[\ ] =$ dan $[\ ] = 0$

$=$

(3) $[\ (\ + \ ) \ ]$

$= [\ (\ + \ ) \ ]$

$= [\ + \ ]$

$= \{ [\ ] + [\ ]\}$

$= (\ + 0)$; karena $[\ ] =$ dan $[\ ] = 0$

$=$

(4) $[\ ] =$

Dari (1), (2), …, (4) diperoleh:

$(\ - (\ + \ )) = (\ + \ ) - \ - \ +$

karena ( ) = dan ( ) = , maka

$= (+) - 2 +$

Untuk mendapatkan taksiran terbaik, maka berdasarkan metode *langrange*, diperoleh fungsi *langrange*:

$= (+) - 2 + - 2 (-)$

$= (+) - 2 + - 2 + 2)$

yang akan diturunkan terhadap dan adalah vektor pengali *langrange* yang berukuran $\times 1$, sehingga dari metode tersebut diperoleh dan yang meminimumkan fungsi *f*.

Berikut ini turunan parsial dari *f* terhadap dan .

$= ((+) - 2 + - 2 + 2$

a. Berikut akan dicari — yang merupakan turunan parsial dari *f* terhadap .

Untuk mendafat *f* yang minimum, maka — $= 0$.

$$— = \frac{((+) - 2 + - 2 + 2}{}$$

$$= \frac{(((+))}{} - \frac{2}{} + \frac{( )}{} - \frac{(2)}{} + \frac{(2)}{}$$

Akan dicari nilai turunan masing-masing suku tersebut.

1. $\frac{(( )}{} = (+) \frac{( )}{} = 2(+)$

2. $\frac{}{} = 2 \quad \frac{}{} = 2$

3. $\frac{( )}{} = 0$

4. $= \cdots \quad \vdots = \quad + \cdots +$

$2 \quad = 2(\quad + \cdots + \quad)$

$= (2 \quad + \cdots + 2 \quad)$

$$\frac{(2 \quad)}{} = \frac{2 \quad + \cdots + 2}{}$$

$= \ 2 \quad + \cdots + 2$

$= 2 \quad + \cdots +$

$= 2$

5. $= \cdots \quad \vdots = \quad + \cdots +$

$2 \quad = 2 \quad + \cdots + \quad = \ 2 \quad + \cdots + 2$

$$\frac{(2 \quad)}{} = \frac{2 \quad + \cdots + 2}{} = 0$$

sehingga didapat:

$\frac{}{} = 2(\quad + \quad) \ - 2 \quad + 0 - 2 \quad + 0$

$= 2(\quad + \quad) \ - 2 \quad - 2$

b. Berikut akan dicari $\frac{}{}$ yang didefinisikan sebagai turunan parsial pertama dari *f* terhadap masing-masing elemen vector . Agar didapat *f* yang minimum, maka $\frac{}{} = 0, \frac{}{} = 0, \cdots, \frac{}{} = 0$, sehingga $\frac{}{} = 0$.

$$\frac{}{} = \frac{((\quad + \quad) \ - 2 \quad + \quad - 2 \quad + 2}{}$$

$$= \frac{(\;((\;\;+\;\;)\;)}{} - \frac{2}{} + \frac{(\;\;)}{} - \frac{(2\;\;\;\;)}{} + \frac{(2\;\;\;)}{}$$

Akan dicari nilai turunan masing-masing suku tersebut.

1. $\frac{(\;(\;\;\;\;\;)}{} = (\;\;+\;\;)\frac{}{}$

$$\frac{}{} = \begin{pmatrix} \frac{}{} \\ \vdots \\ \frac{}{} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} = 0$$

2. $\frac{}{} = 2 \quad \frac{}{} = 2 \begin{pmatrix} \frac{}{} \\ \vdots \\ \frac{}{} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} = 0$

3. $\frac{}{} = \begin{pmatrix} \frac{}{} \\ \vdots \\ \frac{}{} \end{pmatrix} == \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} = 0$

4. $\;\;= \;\;\cdots\;\; \vdots \;\;= \;\;+\cdots+$

$$2 \;\;\; = 2 \;\;\; + \cdots +$$

$$= \;2 \;\;\; + \cdots + 2$$

$$\frac{(\;\;\;\;)}{} = \frac{2\;\;\;\;+\cdots+2}{}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\;\;\;\;+\cdots+2}{} \\ \vdots \\ \frac{2\;\;\;\;+\cdots+2}{} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{matrix}$$

$$= 2$$

5. $= \cdots \vdots = + \cdots +$

$2 = 2 + \cdots + = 2 + \cdots + 2$

$$\frac{(2\quad)}{} = \frac{2 \quad + \cdots + 2}{}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cdots}{} \\ \vdots \\ \frac{\cdots}{} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{matrix} = 2$$

sehingga didapat:

$\frac{}{} = 0 - 0 + 0 - 2 \quad + 2$

$= -2 \quad + 2$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari a dan b, maka didapat:

$\frac{}{} = 2(\quad + \quad) - 2 \quad - 2$

$= 2(\quad + \quad) - 2 \quad - 2 \quad ;$

karena $= \quad = {}_1 \; {}_1 + \cdots +$

$\frac{}{} = -2 \quad + 2$

Berdasarkan metode *langrange*, nilai dan dapat diperoleh dari:

$\frac{}{} = 2(\quad + \quad) - 2 \quad - 2 \quad = 0$

$\frac{}{} = -2 \quad + 2 \quad = 0$

Sehingga jika didapat persamaan:

$(\quad + \quad) - \quad =$

$$- \quad = 0$$

Kemudian dibentuk menjadi persamaan:

$$(\quad + \quad) \quad 0 \quad - \quad =$$

Untuk mencari nilai dan pada persamaan di atas, dapat digunakan teorema invers untuk matriks partisi, sehingga didapat:

$$= \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad (\quad + \quad) \quad (\quad + \quad) \quad + \quad -(\quad + \quad)$$

dengan

$$= (^2 + \ ^2)^{-1} \quad (\quad ^{-1}(^2 + \ ^2)^{-1} \quad)^{-} \quad + (^2 + \ ^2)^{-1}[\ - \quad (\quad ^{-1}(^2 + \ ^2)^{-1} \quad (^2 + \ ^2)^{-1})] \ ^2$$

$$- \quad = (\quad (^2 + \ ^2)^{-1} \quad)^{-1} \quad (^2 + \ ^2)^{-1} \ ^2 - (\quad (^2 + \ ^2)^{-1} \quad)^{-1}$$

Karena sembarang penaksir = memenihi sifat *best,* linear dan *unbiased*, maka:

$$=$$

$$= (\quad + \quad) \quad (\quad (\quad + \quad) \quad) \quad + (\quad + \quad) \quad [\ - \quad (\quad (\quad + \quad) \quad (\quad + \quad) \quad)]$$

$$= \quad (\quad (\quad + \quad) \quad) \quad (\quad + \quad) \quad + \quad (\quad + \quad)$$

$$- \quad (\quad + \quad) \quad (\quad (\quad + \quad) \quad) \quad (\quad + \quad)$$

D. MSE BLUP

$$\text{MSE} = \quad (\quad) + \quad (\quad)$$

dimana:

$$(\quad) = \frac{}{(\quad + \quad)}$$

$$(\quad) = \quad 1 - \frac{}{(\quad + \quad)} \qquad \frac{(\quad + \quad)}{}$$

Akan ditunjukkan bahwa:

1. $(\quad) = \frac{}{}$

Bukti:

$$(\,\hat{}\,) = \quad + \frac{}{+} \quad - \quad - \quad +$$

$$= \quad + \frac{}{(\quad + \quad)}(\quad + \quad) - \quad - \quad ;\text{karena} \quad - \quad = \quad +$$

$$= \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) -$$

$$= \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) - \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) -$$

$$= \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) - \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) \; -$$

$$= \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) - \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) -$$

$$= \quad \frac{}{+}(\quad + \quad)\frac{}{+}(\quad + \quad) - \quad \frac{}{+}(\quad + \quad)$$

$$- \quad \frac{}{+}(\quad + \quad) + [\quad]$$

$$= \frac{}{+} \quad [\quad + \quad + \quad + \quad] - \frac{}{+} \quad [\quad + \quad]$$

$$- \frac{}{+} \quad [\quad + \quad] + [\quad]$$

$$= \frac{}{+} \{ [\quad] + [\quad] + [\quad] + [\quad]\}$$

$$- \frac{}{+} \{ [\quad] + [\quad]\} - \frac{}{+} \{ [\quad] + [\quad]\} + [\quad]$$

$$= \frac{}{+} \quad + 0 + 0 + \quad - \frac{}{+} \{ \quad + 0\} - \frac{}{+} \{ \quad + 0\} +$$

$$= \frac{^2}{(^2 + ^2)} {}^2 (^2 + ^2) - 2 \frac{^2}{(^2 + ^2)} (^2) + ^2$$

$$= \frac{(^2)^2}{(^2 + ^2)} - 2 \frac{(^2)^2}{(^2 + ^2)} + ^2$$

$$= {}^2 - \frac{(^2)^2}{(^2 + ^2)}$$

$$= \frac{^2(^2 + ^2) - (^2)^2}{(^2 + ^2)}$$

$$= \frac{(^2)^2 + ^2 \, ^2 - (^2)^2}{(^2 + ^2)}$$

$$= \frac{^2 \, ^2}{(^2 + ^2)} \text{ (terbukti).}$$

2. $(\hat{}) = 1 - \overline{\quad\quad} \quad \overline{\quad\quad}$

Bukti:

$$^2 = \quad - \frac{}{+} \quad (\quad) -$$

$$= \quad 1 - \frac{}{+} \quad (\quad) -$$

$$= 1 - \frac{}{+} \quad (\quad) -$$

$$= 1 - \frac{\quad}{+} \qquad (\quad) - \qquad (\quad) -$$

$$= 1 - \frac{\quad}{+} \qquad (\quad) - \qquad (\quad) -$$

$$= 1 - \frac{\quad}{+} \qquad (\quad) - \qquad (\quad) -$$

$$= 1 - \frac{\quad}{+} \qquad (\quad) - \qquad (\quad) -$$

Karena $(\quad) = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad}$ dan $= \frac{\quad}{\quad}$ maka

$$(\quad) - \quad = \frac{\quad}{+} \quad \frac{\quad}{+} - \frac{- \quad -}{\quad}$$

$$= \frac{\frac{\quad}{+}}{\frac{\quad}{+}} - \quad - \frac{- \quad -}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad} - \frac{- \quad -}{\quad}$$

$$= \frac{- \quad - \quad -}{\quad}$$

$$= \frac{(\quad + \quad)}{\quad}$$

$$(\quad) - \quad = \frac{(\quad + \quad)}{\quad} = \frac{(\quad + \quad)}{\quad}$$

$$(\quad) - \quad (\quad) - \quad = \frac{(\quad + \quad)}{\quad} \quad \frac{(\quad + \quad)}{\quad}$$

$$= \frac{(\quad + \quad)(\quad + \quad)}{\quad}$$

$$= \frac{[\quad + \quad + \quad + \quad]}{\qquad}$$

$$= \frac{+}{\qquad}$$

Sehingga diperoleh:

$$(\ \hat{}\ ) = 1 - \frac{\qquad}{+} \qquad \frac{+}{\qquad}$$

$$= 1 - \frac{\qquad}{+} \qquad + \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad}$$

$$= 1 - \frac{\qquad}{+} \quad \frac{+}{\qquad}$$

$$= 1 - \frac{\qquad}{\qquad} \qquad \frac{\qquad}{\qquad} \qquad \text{(terbukti)}$$

RIWAYAT HIDUP

Iin Ayudhina Fajrin H, lahir di Bantaeng pada tanggal 19 November 1995, sebagai anak ke dua dari dua bersaudara dari buah hati dari pasangan H. Harling dan Hj. Bahriah. Penulis mulai memasuki jenjang pendidikan Sekolah Dasar pada tahun 2001 di SD Negeri 23 Salluang Kabupaten Bantaeng dan lulus pada tahun 2007. Pada tahun 2007 melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 3 Bissappu dan lulus pada tahun 2010. Kemudian pada tahun 2010 melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 1 Bantaeng dan tamat tahun 2013. Pada tahun 2013 terdaftar sebagai mahasiswa aktif di Universitas Negeri Makassar, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA), Program Studi Statistika S1 Angkatan 2013.

Adapun Pengalaman Organisasi yang telah dilalui yaitu:

- Pengurus Himastat (Himpunan Mahasiswa Statistika)

Motto: "*mereka mungkin akan ragu dengan apa yang kamu katakan, tetapi mereka mempercayai apa yang kamu lakukan* "