Suatu Kajian Tentang Lapangan Kabur dan Ruang Vektor Kabur

Muhammad Abdy[1], Syafruddin Side[1] dan Muhammad Edy Rizal[1, a)]

[1] *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar, 90224*
[a)] *e-mail: muhammadrizal1412@gmail.com*

Abstrak. Penelitian ini memberikan beberapa perbaikan pada definisi lapangan kabur dan ruang vektor kabur. Selain itu, juga ditunjukkan beberapa teorema yang berlaku pada kedua konsep lapangan dan ruang vektor (konsep klasik dan kabur).

Kata Kunci : Himpunan Kabur, Lapangan, Ruang Vektor, Lapangan Kabur, Ruang Vektor Kabur

Abstract. This research redefine fuzzy fields and fuzzy linear spaces. Furthermore, we show some theorem that applies to both concepts of fields and linear spaces (classic and fuzzy concept).

Keyword : Fuzzy Set, Fields, Vector Spaces, Fuzzy Fields, Fuzzy Vector Spaces

PENDAHULUAN

Konsep himpunan kabur pertama kali diperkenalkan oleh [1]. Kemudian, [2] mengaplikasikan konsep himpunan kabur ini ke dalam konsep grupoid dan grup. Penelitian yang dilakukan oleh [2] tentang grup kabur kemudian menjadi landasan bagi penelitian-penelitian lain di bidang aljabar kabur, termasuk penelitian mengenai lapangan kabur dan ruang vektor kabur.

Lapangan kabur dan ruang vektor kabur pertama kali didefinisikan oleh [3]. Selain itu, [3] juga memberikan beberapa teorema dasar. [4] menunjukkan kesalahan dalam pendefinisian [3] dan memberikan pendefinisian baru untuk lapangan kabur dan ruang vektor kabur. [5] menunjukkan bahwa masih ada kesalahan pada pendefinisian [4] tentang ruang vektor kabur. Kemudian, [5] mengoreksi definisi dan sebuah teorema ruang vektor kabur yang telah dirumuskan oleh [4].

Lapangan Kabur

Lapangan kabur pertama kali didefinisikan oleh [3]. Kemudian, [4] mengoreksi pendefinisian [3] dengan memanfaatkan salah satu teorema dalam [3]. Pendefinisian ulang lapangan kabur oleh [4] dinyatakan sebagai Definisi 1 berikut.

Definisi 1 [4] Misalkan X sebuah lapangan dan $\tilde{F}$ sebuah himpunan kabur di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{F}}$. $\tilde{F}$ disebut lapangan kabur di X jika dan hanya jika $\forall x, y \in X$ berlaku:

i. $\mu_{\tilde{F}}(x+y) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}$

ii. $\mu_{\tilde{F}}(-x) \geq \mu_{\tilde{F}}(x)$

iii. $\mu_{\tilde{F}}(xy) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}$

iv. $\mu_{\tilde{F}}(x^{-1}) \geq \mu_{\tilde{F}}(x)$

Adapun teorema yang digunakan oleh [4] untuk merumuskan Definisi 1, dinyatakan sebagai Teorema 2 berikut.

Teorema 2 [3] Misalkan X sebuah lapangan dan $\tilde{F}$ sebuah himpunan kabur di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{F}}$. $\tilde{F}$ disebut lapangan kabur di X jika dan hanya jika $\forall x, y \in X$ berlaku:

i. $\mu_{\tilde{F}}(x-y) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}$ (1)

ii. $\mu_{\tilde{F}}(xy^{-1}) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}; y \neq 0$ (2)

Ruang Vektor Kabur

Selain mendefinisikan lapangan kabur, [3] juga mendefinisikan ruang vektor kabur. [4] mengoreksi pendefinisian [3] dengan memanfaatkan salah satu teorema dalam [3]. Selanjutnya, [5] menunjukkan bahwa, meskipun ruang vektor kabur telah didefinisikan ulang oleh [3], namun tetap belum memenuhi syarat cukup dan perlu dari teorema yang dimaksud tersebut. Sehingga, [5] mendefinisikan ulang ruang vektor kabur sebagai Definisi 3 berikut.

Definisi 3 [5] Misalkan X sebuah lapangan dan $\tilde{F}$ sebuah lapangan kabur di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{F}}$. Misalkan Y sebuah ruang vektor atas X dan V sebuah himpunan kabur di Y dengan fungsi keanggotaan μ_V. V disebut sebagai ruang vektor kabur atas lapangan kabur F, jika kondisi berikut terpenuhi $\forall x, y \in Y$ dan $\forall k \in X$

i. $\mu_V(x+y) \geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\}$

ii. $\mu_V(-x) \geq \mu_V(x)$

iii. $\mu_V(kx) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(k), \mu_V(x)\}$

iv. $\mu_{\tilde{F}}(1) \geq \mu_V(0)$

Selain itu, [5] juga merumuskan ulang teorema yang digunakan oleh [4] dalam mendefinisikan ruang vektor kabur menjadi Teorema 4 berikut.

Teorema 4 [5] Misalkan $\tilde{F}$ lapangan kabur di X, dan Y sebuah ruang vektor atas X. Misalkan V sebuah himpunan kabur di Y. Maka V adalah sebuah ruang vektor kabur atas F jika dan hanya jika $\forall k, l \in X$ dan $\forall x, y \in Y$ berlaku

i. $\mu_V(kx+ly) \geq \min\left\{\min\{\mu_F(k), \mu_V(x)\}, \min\{\mu_F(l), \mu_V(y)\}\right\}$ (3)

ii. $\mu_F(1) \geq \mu_V(x)$ (4)

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian dasar atau murni serta menggunakan metode studi literatur. Yaitu, dengan membaca literatur-literatur yang berhubungan dengan lapangan kabur dan ruang vektor kabur. Fokus kajian dalam penelitian ini terletak pada definisi dan teorema dasar dalam lapangan kabur dan ruang vektor kabur.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan ulang lapangan kabur.
2. Membuktikan beberapa teorema lapangan kabur dengan tujuan untuk melihat kesesuaiannya dengan teorema pada lapangan klasik.
3. Mendefinisikan ulang ruang vektor kabur.
4. Membuktikan beberapa teorema ruang vektor kabur dengan tujuan untuk melihat kesesuaiannya dengan teorema pada ruang vektor klasik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Lapangan Kabur

Definisi 1 masih dapat diubah menjadi bentuk yang lebih sederhana, dinyatakan sebagai Definisi 5 berikut.

Definisi 5 Misalkan X sebuah lapangan dan $\tilde{F}$ sebuah himpunan kabur di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{F}}$. $\tilde{F}$ disebut lapangan kabur di X jika dan hanya jika $\forall x, y \in X$ berlaku:

i. $\mu_{\tilde{F}}\left(x+y\right) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(y\right)\right\}$ (5)

ii. $\mu_{\tilde{F}}\left(-x\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(x\right)$ (6)

iii. $\mu_{\tilde{F}}\left(xy\right) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(y\right)\right\}$ (7)

iv. $\mu_{\tilde{F}}\left(x^{-1}\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(x\right), x \neq 0$ (8)

Bukti Teorema 2 Diberikan sebuah lapangan X dan sebuah himpunan kabur tak kosong $\tilde{F}$ di X. Akan dibuktikan bahwa Definisi 5 memenuhi sebagai syarat cukup dan perlu dari Teorema 2.

$\Rightarrow$ Karena X lapangan, maka $\forall y \in X \Rightarrow (-y), \left(y^{-1}\right) \in X$. Kemudian, karena $\tilde{F}$ lapangan kabur di X, maka keempat syarat dari Definisi 5 terpenuhi. Sehingga, diperoleh:

i. $\forall x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{F}}\left(x-y\right) &\geq \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(-y\right)\right\}\\ &= \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(y\right)\right\}\end{aligned}$$

ii. $\forall x, y\left(\neq 0\right) \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{F}}\left(xy^{-1}\right) &\geq \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(y^{-1}\right)\right\}\\ &= \min\left\{\mu_{\tilde{F}}\left(x\right), \mu_{\tilde{F}}\left(y\right)\right\}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Karena X lapangan, maka $0,1 \in X$, dimana 0 elemen identitas penjumlahan dan 1 elemen identitas perkalian di X.

i. Berdasarkan Teorema 2, persamaan (1), diperoleh $\forall x \in X$ berlaku

$$\mu_{\tilde{F}}\left(0\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(x-x\right) \geq \mu_{\tilde{F}}\left(x\right) \tag{9}$$

Untuk suatu $0 \in X$. Kemudian, berdasarkan persamaan (9), maka $\forall x \in X$ berlaku

$$\mu_{\tilde{F}}\left(-x\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(0-x\right) \geq \mu_{\tilde{F}}\left(x\right) \tag{10}$$

Karena X lapangan, maka $\forall x \in X, \exists\left(-x\right) \in X$, dimana $\left(-x\right)$ elemen invers penjumlahan di X. Diambil sebarang $x \in X$. Pilih $y = (-x) \in X$. Akibatnya, untuk $y \in X$ juga berlaku persamaan (10), yaitu

$$\begin{aligned}&\mu_{\tilde{F}}\left(-y\right) \geq \mu_{\tilde{F}}\left(y\right)\\ \Rightarrow\ &\mu_{\tilde{F}}\left(-\left(-x\right)\right) \geq \mu_{\tilde{F}}\left(-x\right)\\ \Rightarrow\ &\mu_{\tilde{F}}\left(x\right) \geq \mu_{\tilde{F}}\left(-x\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Karena $\forall x \in X$ berlaku persamaan (10) dan $y = (-x) \in X$ berlaku persamaan (11), maka haruslah $\forall x \in X$ berlaku persamaan (6), yaitu

$$\mu_{\tilde{F}}\left(-x\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(x\right)$$

ii. Dengan ide yang serupa pada poin i, dengan memanfaatkan persamaan (2), dapat diperoleh persamaan (8) dari Definisi 5, yaitu $\forall x\left(\neq 0\right) \in X$ berlaku

$$\mu_{\tilde{F}}\left(x^{-1}\right) = \mu_{\tilde{F}}\left(x\right)$$

iii. Karena $\forall x \in X$ berlaku $\mu_{\tilde{F}}(-x) = \mu_{\tilde{F}}(x)$, maka berdasarkan persamaan (1), $\forall x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{F}}(x+y) &= \mu_{\tilde{F}}(x-(-y)) \\ &\geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(-y)\} \\ &= \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}\end{aligned}$$

iv. Karena $\forall x(\neq 0) \in X$ berlaku $\mu_{\tilde{F}}(x^{-1}) = \mu_{\tilde{F}}(x)$, maka berdasarkan persamaan (2), $\forall x, y(\neq 0) \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{F}}(xy) &= \mu_{\tilde{F}}\left(x\left(y^{-1}\right)^{-1}\right) \\ &\geq \min\left\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}\left(y^{-1}\right)\right\} \\ &= \min\{\mu_{\tilde{F}}(x), \mu_{\tilde{F}}(y)\}\end{aligned}$$

□

Teorema 6 Jika F adalah sebuah lapangan kabur di X, maka $\forall x \in X$ berlaku:

$$\mu_{\tilde{F}}(0) \geq \mu_{\tilde{F}}(1) \geq \mu_{\tilde{F}}(x) = \mu_{\tilde{F}}(-x) = \mu_{\tilde{F}}\left(x^{-1}\right)$$

Tentu saja, Teorema 6 merupakan persamaan yang lebih umum dari sifat lapangan klasik (jika dipandang sebagai sebuah himpunan kabur), yaitu

$$\mu_{\tilde{F}}(0) = \mu_{\tilde{F}}(1) = \mu_{\tilde{F}}(x) = \mu_{\tilde{F}}(-x) = \mu_{\tilde{F}}\left(x^{-1}\right) = 1$$

Teorema 7 Diberikan sebuah lapangan F. Misalkan himpunan κ, sebuah keluarga himpunan lapangan kabur sebarang dari lapangan F. Irisan dari κ juga sebuah lapangan kabur di F.

Bukti Misalkan sebuah keluarga himpunan lapangan kabur $\kappa = \{F_i \mid i \in I\}$, dimana F_i lapangan kabur di F, dan I suatu interval. Diasumsikan κ himpunan infinit. Kemudian, dimisalkan pula, irisan keluarga himpunan κ,

$$\bigcap \kappa = \bigcap_{i \in I} F_i = \{(x, \mu_{\cap\kappa}(x)) \mid x \in F, i \in I\}$$

Dimana $\mu_{\cap\kappa}(x)$ merupakan derajat keanggotaan x dalam $\cap\kappa$ dan didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\mu_{\cap\kappa} &: F \to [0,1] \\ x &\to \mu_{\cap\kappa}(x) = \min\left\{\mu_{F_p}, \mu_{F_q}, \ldots\right\}; \forall p, q \in I\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa keempat syarat dari Definisi 5 terpenuhi.

i. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\kappa}(x+y) = \min\left\{\mu_{F_p}(x+y), \mu_{F_q}(x+y), \ldots\right\} = \mu_{F_j}(x+y)$$

Untuk suatu $j \in I$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned}\mu_{\cap\kappa}(x+y) &= \min\left\{\mu_{F_p}(x+y), \mu_{F_q}(x+y), \ldots\right\} \\ &= \mu_{F_j}(x+y) \\ &\geq \min\left\{\mu_{F_j}(x), \mu_{F_j}(y)\right\} \\ &\geq \min\left\{\min\left\{\mu_{F_j}(x), \mu_{F_k}(x)\right\}, \min\left\{\mu_{F_j}(y), \mu_{F_k}(y)\right\}\right\}; \forall k \in I, k \neq j \\ &= \min\{\mu_{\cap\kappa}(x), \mu_{\cap\kappa}(y)\}\end{aligned}$$

Jadi, persamaan (5) dari Definisi 5 terpenuhi.

ii. Dengan ide yang serupa pada poin i, dapat diperoleh persamaan (7) dari Definisi 5, yaitu $\forall x, y \in X$ berlaku

$$\mu_{\cap\kappa}(xy) \geq \min\{\mu_{\cap\kappa}(x), \mu_{\cap\kappa}(y)\}$$

iii. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\kappa}(-x) = \min\left\{\mu_{F_p}(-x), \mu_{F_q}(-x), \ldots\right\} = \mu_{F_j}(-x)$$

Untuk suatu $j \in I$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned}\mu_{\cap\kappa}(-x) &= \min\left\{\mu_{F_p}(-x), \mu_{F_q}(-x), \ldots\right\} \\ &= \mu_{F_j}(-x) \\ &= \mu_{F_j}(x) \\ &= \min\left\{\mu_{F_p}(x), \mu_{F_q}(x), \ldots\right\} \\ &= \mu_{\cap\kappa}(x)\end{aligned}$$

Jadi, persamaan (6) dari Definisi 5 terpenuhi.

iv. Dengan ide yang serupa pada poin iii, dapat diperoleh persamaan (8) dari Definisi 5, yaitu $\forall x(\neq 0) \in X$ berlaku

$$\mu_{\cap\kappa}\left(x^{-1}\right) = \mu_{\cap\kappa}(x)$$

Akibat 8 *Jika* K *dan* L *adalah lapangan kabur di sebuah lapangan* F *, maka* $K \cap L$ *juga lapangan kabur di* F *.*

Ruang Vektor Kabur

Sebagaimana definisi 1, definisi 3 juga masih dapat diubah menjadi bentuk yang lebih sederhana. Dinyatakan sebagai definisi 9 berikut ini.

Definisi 9 Misalkan X sebuah lapangan dan F sebuah lapangan kabur di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{F}}$. Misalkan Y sebuah ruang vektor atas X dan V sebuah himpunan kabur di Y dengan fungsi keanggotaan μ_V . V disebut sebagai ruang vektor kabur atas lapangan kabur F , jika kondisi berikut terpenuhi $\forall x, y \in Y$ dan $\forall k \in X$

i. $\mu_V(x+y) \geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\}$ (12)

ii. $\mu_V(-x) = \mu_V(x)$ (13)

iii. $\mu_V(kx) \geq \min\{\mu_{\tilde{F}}(k), \mu_V(x)\}$ (14)

iv. $\mu_{\tilde{F}}(1) \geq \mu_V(0)$ (15)

Bukti Teorema 4 Diberikan $\tilde{F}$ lapangan kabur di lapangan X , Y sebuah ruang vektor atas X dan sebuah himpunan kabur V di Y . Akan dibuktikan bahwa Definisi 9 memenuhi sebagai syarat cukup dan perlu dari Teorema 4.

$\Rightarrow$ Karena X lapangan, maka $\forall y \in X \Rightarrow (-y), \left(y^{-1}\right) \in X$. Kemudian, karena $\tilde{F}$ lapangan kabur di X , maka keempat syarat dari Definisi 5 terpenuhi. Sehingga, diperoleh:

i. Karena Y ruang vektor atas lapangan X , maka $\forall k, l \in X$ dan $\forall x, y \in Y$, berlaku $kx, ly \in Y$. Berdasarkan persamaan (12) dan (14) pada Definisi 9, diperoleh

$$\begin{aligned}\mu_V(kx+ly) &\geq \min\{\mu_V(kx), \mu_V(ly)\} \\ &\geq \min\left\{\min\{\mu_F(k), \mu_V(x)\}, \min\{\mu_F(l), \mu_V(y)\}\right\}\end{aligned}$$

ii. Berdasarkan persamaan (12), (13) dan (15), diperoleh

$$\mu_F(1) \geq \mu_V(0)$$

$$= \mu_V(x+(-x))$$
$$\geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(-x)\}$$
$$= \mu_V(x)$$

$\Leftarrow$ Karena X lapangan, maka $0,1 \in X$. Dimana 0 merupakan elemen identitas penjumlahan dan 1 elemen identitas perkalian di X.

i. Berdasarkan persamaan (3) dan (4) dari Teorema 4, diperoleh $\forall x, y \in Y, 1 \in X$ berlaku

$$\mu_V(x+y) \geq \min\{\mu_V(1x), \mu_V(1y)\}$$
$$\geq \min\{\min\{\mu_F(1), \mu_V(x)\}, \min\{\mu_F(1), \mu_V(y)\}\}$$
$$= \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\}$$

ii. Berdasarkan Teorema 4 persamaan (4) dan Teorema 6, diperoleh $\forall x \in Y$ dan $0,1,(-1) \in X$ berlaku

$$\mu_{\tilde{F}}(0) \geq \mu_F(1) \geq \mu_V(x) \qquad (16)$$

dan,

$$\mu_{\tilde{F}}(-1) = \mu_F(1) \geq \mu_V(x) \qquad (17)$$

Berdasarkan persamaan (3), (16) dan (17), diperoleh $\forall x \in Y$ berlaku

$$\mu_V(-x) = \mu_V(0x+(-1)x)$$
$$\geq \min\{\min\{\mu_F(0), \mu_V(x)\}, \min\{\mu_F(-1), \mu_V(x)\}\}$$
$$= \mu_V(x) \qquad (18)$$

Kemudian, karena Y ruang vektor, maka $\forall x \in Y, \exists(-x) \in Y$. Pilih $y = (-x) \in Y$. Berdasarkan persamaan (18), diperoleh

$$\mu_V(-y) \geq \mu_V(y)$$
$$\Rightarrow \mu_V(-(-x)) \geq \mu_V(-x)$$
$$\Rightarrow \mu_V(x) \geq \mu_V(-x) \qquad (19)$$

Berdasarkan persamaan (18) dan (19), haruslah $\forall x \in Y$ berlaku $\mu_V(x) = \mu_V(-x)$.

iii. Berdasarkan persamaan (3) Teorema 4 dan persamaan (16), diperoleh $\forall x \in Y, k \in X$ berlaku

$$\mu_V(kx) = \mu_V(0x+kx)$$
$$\geq \min\{\min\{\mu_F(0), \mu_V(x)\}, \min\{\mu_F(k), \mu_V(x)\}\}$$
$$= \min\{\mu_F(k), \mu_V(x)\} \qquad (20)$$

iv. Jelas, berdasarkan persamaan (4) dari Teorema 4.

Teorema 10 Jika V sebuah ruang vektor atas lapangan kabur F, maka

$$\mu_F(0) \geq \mu_F(1) \geq \mu_V(0) \geq \mu_V(x) = \mu_V(-x)$$

Teorema 10 merupakan persamaan yang lebih umum dari sifat ruang vektor klasik atas lapangan klasik (jika dipandang sebagai sebuah himpunan kabur), yaitu

$$\mu_F(0) = \mu_F(1) = \mu_V(0) = \mu_V(x) = \mu_V(-x) = 1$$

Teorema 11 Diberikan F lapangan kabur di X dan Y ruang vektor di X. Misalkan himpunan $\Re$, sebuah keluarga himpunan ruang vektor kabur atas F di Y. Irisan dari $\Re$ juga sebuah ruang vektor kabur atas F di Y.

Bukti Misalkan keluarga himpunan ruang vektor kabur $\Re = \{V_i \mid i \in I\}$, dimana V_i ruang vektor kabur di Y, dan I suatu interval. Diasumsikan $\Re$ himpunan infinit. Kemudian, dimisalkan pula, irisan keluarga himpunan $\Re$,

$$\bigcap \Re = \bigcap_{i \in I} V_i = \left\{\left(x, \mu_{\cap\Re}(x)\right) \mid x \in Y, i \in I\right\}$$

Dimana $\mu_{\cap\Re}(x)$ merupakan derajat keanggotaan x dalam $\bigcap\Re$ dan didefinisikan sebagai

$$\mu_{\cap\Re} : Y \to [0,1]$$
$$x \to \mu_{\cap\Re}(x) = \min\left\{\mu_{V_p}, \mu_{V_q}, \ldots\right\}; \forall p, q \in I$$

Akan ditunjukkan bahwa keempat syarat dari Definisi 9 terpenuhi.

i. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\Re}(x+y) = \min\left\{\mu_{V_p}(x+y), \mu_{V_q}(x+y), \ldots\right\} = \mu_{V_j}(x+y)$$

Untuk suatu $j \in I$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_{\cap\Re}(x+y) &= \mu_{V_j}(x+y) \\ &\geq \min\left\{\mu_{V_j}(x), \mu_{V_j}(y)\right\} \\ &\geq \min\left\{\min\left\{\mu_{V_j}(x), \mu_{V_k}(x)\right\}, \min\left\{\mu_{V_j}(y), \mu_{V_k}(y)\right\}\right\}; \forall k \in I, k \neq j \\ &= \min\left\{\mu_{\cap\Re}(x), \mu_{\cap\Re}(y)\right\} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan (12) dari Definisi 9 terpenuhi.

ii. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\Re}(-x) = \min\left\{\mu_{V_p}(-x), \mu_{V_q}(-x), \ldots\right\} = \mu_{V_j}(-x)$$

Untuk suatu $j \in I$. Kemudian, karena $\forall i \in I$, V_i ruang vektor kabur atas F, maka $\forall x \in V_i, \forall i \in I, \mu_{V_i}(x) = \mu_{V_i}(-x)$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_{\cap\Re}(-x) &= \mu_{V_j}(-x) \\ &= \mu_{V_j}(x) \\ &= \min\left\{\mu_{V_p}(x), \mu_{V_q}(x), \ldots\right\} \\ &= \mu_{\cap\Re}(x) \end{aligned}$$

Jadi, persamaan (13) dari Definisi 9 terpenuhi.

iii. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\Re}(kx) = \min\left\{\mu_{V_p}(kx), \mu_{V_q}(kx), \ldots\right\} = \mu_{V_j}(kx)$$

Untuk suatu $j \in I$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_{\cap\Re}(kx) &= \mu_{V_j}(kx) \\ &\geq \min\left\{\mu_F(k), \mu_{V_j}(x)\right\} \\ &\geq \min\left\{\mu_F(k), \min\left\{\mu_{V_j}(x), \mu_{V_k}(x)\right\}\right\}; \forall k \in I, k \neq j \\ &= \min\left\{\mu_F(k), \mu_{\cap\Re}(x)\right\} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan (14) dari Definisi 9 terpenuhi.

iv. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$\mu_{\cap\Re}(0) = \min\left\{\mu_{V_p}(0), \mu_{V_q}(0), \ldots\right\} = \mu_{V_j}(0)$$

Untuk suatu $j \in I$. Kemudian, karena V_j ruang vektor kabur atas F, maka $\mu_F(1) = \mu_{V_j}(0)$. Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_F(1) &\geq \mu_{V_j}(0) \\ &\geq \min\left\{\mu_{V_j}(0), \mu_{V_k}(0)\right\}; \forall k \in I, k \neq j \\ &= \mu_{\cap\mathfrak{R}}(0) \end{aligned}$$

Jadi, persamaan (15) dari Definisi 9 terpenuhi.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Definisi lapangan kabur yang didefinisikan oleh [4] masih dapat dilengkapi dengan mengubah syarat $\mu_F(-x) \geq \mu_F(x)$ dan $\mu_F(x^{-1}) \geq \mu_F(x)$ menjadi sebuah kesamaan, yaitu $\mu_F(-x) = \mu_F(x)$ dan $\mu_F(x^{-1}) = \mu_F(x)$. Begitupula dengan definisi ruang vektor kabur oleh [5] masih dapat dilengkapi dengan mengubah syarat $\mu_V(-x) \geq \mu_V(x)$ menjadi $\mu_V(-x) = \mu_V(x)$.
2. Tidak semua teorema lapangan klasik juga berlaku pada konsep lapangan kabur. Namun, ada beberapa teorema yang berlaku pada kedua konsep lapangan tersebut. Contohnya, tentang irisan keluarga lapangan kabur.
3. Tidak semua teorema ruang vektor klasik juga berlaku pada konsep ruang vektor kabur. Namun, ada beberapa teorema yang berlaku pada kedua konsep ruang vektor tersebut. Contohnya, tentang irisan keluarga ruang vektor kabur.

DAFTAR PUSTAKA

1. L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
2. A. Rosenfeld, “Fuzzy Groups,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 512-517, 1971.
3. S. Nanda, “Fuzzy Fields and Fuzzy Linear Spaces,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 19, no. 1, pp. 89-94, Mei 1986.
4. R. Biswas, “Fuzzy Fields and Fuzzy Linear Space Redefined,” *Fuzzy Sets and Systems*, pp. 257-259, 1989.
5. G. Wenxiang dan L. Tu, “Fuzzy Linear Spaces,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, pp. 377-380, 1992.