SKRIPSI

KONSEP DAN SIFAT DASAR GRAF FUZZY

MUH. RAID SALMAN T.

1311141013

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR

2017

SKRIPSI

KONSEP DAN SIFAT DASAR GRAF FUZZY

Diajukan kepada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar
untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh Gelar Sarjana Sains Matematika

MUH. RAID SALMAN T.

1311141013

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR

2017

PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi atas nama Muh. Raid Salman T., NIM : 1311141013 dengan judul KONSEP DAN SIFAT DASAR GRAF FUZZY, diterima oleh Panitia Ujian Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar, dengan SK. No. 844 /UN36.1/PP/2017, Tanggal 24 Maret 2017 untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Jurusan Matematika pada Hari Rabu, Tanggal 29 Maret 2017.

Disahkan Oleh:
Dekan FMIPA UNM Makassar

Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.
NIP. 19620417 198803 1 001

Panitia Ujian:

1. Ketua Ujian : *Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.* (.............................)
2. Sekretaris : *Dr. Awi, M.Si.* (.............................)
3. Pembimbing I : *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.* (.............................)
4. Pembimbing II : *Syafruddin Side, S.Si., M.Si, Ph.D.* (.............................)
5. Penguji I : *Dr. Awi, M.Si.* (.............................)
6. Penguji II : *Sutamrin, S.Si, M.Pd* (.............................)

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk telah saya nyatakan dengan benar. Bila dikemudian hari ternyata pernyataan saya terbukti tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan oleh FMIPA UNM Makassar.

Yang membuat pernyataan,

Nama	: Muh. Raid Salman T.
NIM	: 1311141013
Tanggal	: 29 Maret 2017

PERSETUJUAN PUBLIKASI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademi Universitas Negeri Makassar, saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muh. Raid Salman T
Nim	: 1311141013
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Demi kepentingan ilmu pengetahuan, saya menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Negeri Makassar **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas skripsi saya yang berjudul : ***Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy*** beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Negeri Makassar berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	: Makassar
Pada tanggal	: 29 Maret 2017

Menyetujui

Pembimbing I | Yang menyatakan

Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si.
NIP. 19690129 199403 1 001

Muh. Raid Salman T.
NIM.1311141013

PERSEMBAHAN

Teruntuk Ayahku Edi Ibnu Tufail, Ibuku Rosmiati dan saudara-saudaraku atas semua doa, cinta, dan kasih sayang yang tidak dapat terbalaskan dengan apapun. Dengan ini aku persembahkan karya sederhana ini seabagai tanda syukur telah dilaluinya satu tahap dalam peralanan panjang ini.

ABSTRAK

Muh. Raid Salman T. 2017. *Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy*. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Makassar (dibimbing oleh Muhammad Abdy dan Syafruddin Side).

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji konsep dasar graf fuzzy, graf fuzzy reguler serta sifat-sifat graf fuzzy reguler. Adapun literatur utama yang digunakan adalah artikel yang ditulis oleh A. Nagoor Gani dan K. Radha (2008). Hasiln yang diperoleh menjelaskan dan menguraikan definisi dan teorema beberapa konsep dasar graf fuzzy, graf fuzzy reguler, graf fuzzy total reguler dan sifat-sifat graf fuzzy reguler dan total reguler, serta tiga teorema baru berkaitan dengan graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler.

Kata Kunci: *Himpunan Kabur, Teori Graf, Graf Fuzzy, Derajat Titik, Graf Fuzzy Reguler, Derajat Total Titik, Graf Fuzzy Total Reguler*

ABSTRACT

Muh. Raid Salman T. 2017. *Basic of concept and properties on fuzzy graphs*. Thesis. The Department Of Mathematics. Faculty of mathematics and natural sciences. State University Of Makassar

This research aims to review the basic concept of fuzzy graph, regular fuzzy graph, and properties of regular fuzzy graph. The main literature used is an article written by A. Nagoor Gani and Radha K. (2008). The results obtained explain and elaborate on the definitions and theorems some basic concepts of fuzzy graph, regular fuzzy graph, total regular fuzzy graph and properties of regular fuzzy graph and total regular, as well as three new theorems relating to regular fuzzy graph and total regular fuzzy graph.

Keyword: *Fuzzy Set, Graph Theory, Fuzzy Graph, Degree of vertex, Regular fuzzy graph , Total degree of a vertex, Total regular fuzzy graph*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu 'Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT, atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "***Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy***", sebagai salah satu syarat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan dunia akhirat.

Terima kasih yang tak terhingga penulis hanturkan kepada Ayahanda Edi Ibnu Tufail dan Ibunda Rosmiati atas segala doa, kasih sayang, cinta, nasihat, motivasi, serta berbagai macam bantuan, baik secara moril maupun materil. Terima kasih atas bimbingan serta ketulusan dalam merawat penulis dari lahir hingga sekarang. Dan tak lupa terima kasih kepada kakak dan adik-adik serta keluarga atas segala dorongan dan bantuannya selama ini. Semoga Allah membalas semua kebaikannya dengan pahala yang berlipat ganda.

Iringan doa dan ucapan terima kaih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Husain Syam, M.TP. selaku Rektor Universitas Negeri Makassar

2. Bapak Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas negeri Makassar.
3. Bapak Dr. Awi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.
4. Ibu Wahidah Sanusi, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.
5. Bapak Muhammad Abdy, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku pembimbing I dan Bapak Syafruddin Side, S.Si., M.Si, Ph.D., selaku pembimbing II atas segala bimbingan dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak Dr. Awi, M.Si., selaku penguji I dan Bapak Ahmad Zaki, S.Si., M.Si., selaku Penguji II atas segala saran dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak/Ibu dosen Matematika FMIPA UNM yang telah menyalurkan ilmunya secara ikhlas serta mendidik penulis. Semoga apa yang diberikan senantiasa menjadi amal jariyah.
8. Keluarga besarku, nenek, om, tante, dan sepupu yang selalu memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis.
9. Para *asatidzah* dan *murabbi-murabbi* dimana penulis mengambil ilmu dari mereka yang selalu mengingatkan penulis untuk mengejar akhirat dan tidak melupakan dunia.

10. Saudara-saudaraku karena Allah, saudara halaqah tarbiyah, pengurus FK2PI dan pengurus Wahdah Islamiyah secara umum dan pengurus DPD Wahdah Islamiyah Makassar secara khusus yang selalu mengingatkan penulis untuk tetap teguh diatas jalan perjuangan mengajak ummat kembali kepada Allah.
11. Saudara dan sahabat yang selalu mendukung dan mengingatkan dalam segala hal Edy, Qadri, Ilo, Rahmah, Titi, Disa, Pute, Wati, Dilla, Ririn. Teman-teman SMAN 12 Makassar dan Teman-teman belajar kelompok untuk menghadapi UN dan SBMPTN Ahsan, Fuad, Astry, Gita, Mina, Rany, Shila dan Puput. Terima kasih atas semua kebersamaan dan dukungan selama ini.
12. Teman-teman, kakak-kakak dan adik-adik asisten, Edy, Rahmah, Titi, Disa, Pute, Wati, Hilma, Kak Ayu, Kak Widya, Kak Lina, Kak Wana, Kak Tami, Kak Erni, Kak Lia, Kak Nurma, Rahmat, Indah, Agu, Astri, Ade, Amni dan Rifki.
13. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika Angkatan 2013

Serta orang-orang yang telah berjasa kepada penulis yang tidak dapat dituliskan oleh penulis. Penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan mendapatkan balasan dari Allah, sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat ganda di sisi-Nya.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi segenap pembaca.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Makassar, 29 Maret 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\mu_{\tilde{G}}$	: Derajat keanggotaan himpunan fuzzy G
$\mu_{\tilde{G}}(x)$	: Derajat keanggotaan x dalam himpunan fuzzy G
$\mathrm{S}(\tilde{G})$	: Support himpunan fuzzy G
$\mathrm{Inti}(\tilde{G})$	: Inti himpunan fuzzy G
$\mathrm{Tinggi}(\tilde{G})$	: Tinggi himpunan fuzzy G
$Crossover(\tilde{G})$	: Titik silang himpunan fuzzy G
$\lvert\tilde{G}\rvert$	: Kardinalitas himpunan fuzzy G
$\lVert\tilde{G}\rVert$	: Kardinalitas relatif himpunan fuzzy G
α	: Alpa
ω	: Omega
$[0,1]$	: Interval tutup 0 sampai 1
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$+$	: Tambah
$\therefore$	: Kesimpulan
$\times$	: Kali
$\cap$	: Irisan
$\cup$	: Gabungan
$\subset$	: Himpunan bagian
$\supset$	: Memuat himpunan
$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Ada/terdapat
$\in$	: Elemen
$\notin$	: Bukan elemen

$G:(V,E)$	: Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
O(G)	: Order dari graf G
$S(G)$	: Size dari graf G
$d_G(u)$	: Derajat dari suatu titik pada graf tegas G atau graf fuzzy G
$td_G(u)$	: Derajat total dari suatu titik pada graf fuzzy G

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika dalam ilmu pengetahuan dikenal sebagai “Ratu dari Ilmu Pengetahuan” atau “*Queen of Science*” (Bell, 1951:1). Dalam perkembangannya, matematika banyak digunakan atau diterapkan pada ilmu pengetahuan lainnya sehingga matematika sering juga dikenal sebagai “Pelayan dari Ilmu Pengetahuan” atau “*Servant of Science*” (Bell, 1951:1).

Salah satu ilmu yang mendasar dalam semua cabang ilmu dalam matematika adalah teori himpunan. Teori himpunan digunakan untuk mengelompokkan objek-objek yang memiliki karakteristik yang sama, seperti mengelompokkan manusia dalam karakteristik tertentu, mengelompokkan data dalam karakteristik tertentu atau mengelompokkan bilangan dalam karakteristik tertentu. Teori himpunan memiliki operasi-operasi yang dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

Dalam perkembangan teori himpunan muncul suatu permasalahan dalam mengelompokkan suatu hal yang memiliki keambiguan seperti kelompok lelaki gagah, kelompok bangunan tinggi atau kelompok bilangan rill yang dekat dengan tujuh. Permasalahan ini dipecahkan oleh Lotfi A. Zadeh dengan memperkenalkan teori himpunan fuzzy dan logika fuzzy atau biasa juga dikenal dengan teori fuzzy (Abdy, 2008). Perbedaan antara himpunan biasa dengan himpunan fuzzy adalah dalam masalah keanggotaan himpunan tersebut. Himpunan biasa memiliki keanggotaan yang jelas, sehingga apabila suatu elemen tidak memenuhi karakteristik untuk menjadi anggota dari suatu himpunan maka elemen tersebut bukan bagian dari himpunan yang dimaksud atau bisa dikatakan dalam himpunan biasa, derajat keanggotaannya hanya ada dua yaitu 0 dan 1, dengan 0 adalah bukan anggota dari suatu himpunan dan 1 adalah anggota dari suatu himpunan. Sedangkan dalam himpunan fuzzy memiliki keanggotaan yang ambigu, sehingga untuk menggambarkan apakah suatu elemen merupakan anggota dari suatu himpunan maka elemen tersebut dilihat dari seberapa dekat karakteristiknya terhadap karakteristik dari himpunan yang dimaksud atau bisa dikatakan derajat kenggotaan dari himpunan fuzzy memiliki interval yaitu dari 0 sampai dengan 1. Sehingga untuk membedakan himpunan fuzzy dan himpunan biasa maka himpunan biasa juga biasa disebut himpunan tegas (*crisp*) (Abdy, 2008).

Salah satu cabang ilmu dalam matematika yang menggunakan himpunan sebagai dasarnya adalah teori graf. Teori graf diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan bernama Leonhard Euler. Euler mencoba memecahkan teka-teki yang dikenal dengan nama **Masalah Jembatan Konigsberg** (Munir, 2010). Teori graf menjadikan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) sebagai himpunannya.

Setelah diperkenalkannya teori fuzzy maka banyak ilmu dalam matematika yang pada awalnya menggunakan himpunan tegas (*crisp*) dikaji dengan mengganti himpunan tegas menjadi himpunan fuzzy seperti *Fuzzy Groups* oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1971, *The Fuzzy Integral* oleh Dan Ralescu dan Gregory Adams pada tahun 1980, *Fuzzy Vector Space* oleh P. Lubczonok pada tahun 1990 dan *On Regular Fuzzy Graphs* oleh A. Nagoor Gani dan K. Radha pada tahun 2008.

Graf fuzzy diperkenalkan oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1975 (Gani, 2008). Dalam pengaplikasiannya, graf fuzzy diaplikasikan dalam banyak teori seperti *Cluster Analysis* dan *Database Theory* (Mordeson dan Nair, 2000).

Pada penelitian ini akan dikaji "**Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy"** mengacu kepada penelitian yang dilakukan oleh A. Naagoor Gani dan K. Radha.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana konsep dasar graf fuzzy?
2. Bagaimana sifat dasar graf fuzzy?

C. Tujuan Penelitian

1. Untuk mengetahui konsep dasar graf fuzzy.
2. Untuk mengetahui sifat dasar graf fuzzy.

D. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

Sebagai media untuk mengembangkan pengetahuan mengenai teori graf, teori fuzzy dan graf fuzzy khususnya tentang konsep dasar graf fuzzy pada derajat titik graf fuzzy dan graf fuzzy reguler serta sifat-sfiatnya.

2. Bagi pembaca

Sebagai referensi untuk mengetahui teori graf, teori fuzzy dan graf fuzzy khususnya tentang konsep dasar graf fuzzy pada derajat titik graf fuzzy dan graf fuzzy reguler serta sifat-sifatnya.

E. Ruang Lingkup Pembahasan

Agar penelitian ini terarah, maka ruang lingkup pembahasan dalam penelitian ini adalah konsep dasar graf fuzzy pada derajat titik graf fuzzy dan graf fuzzy reguler serta sifat-sifat graf fuzzy reguler.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

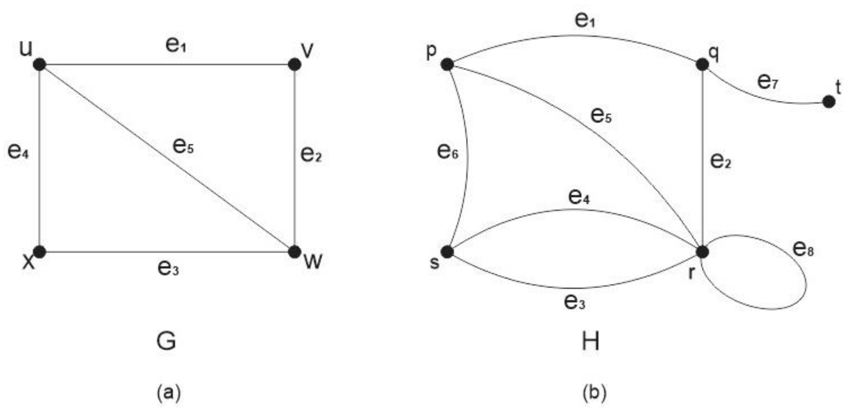
A. Beberapa Konsep dan Sifat Dasar Graf

1. Pengertian Graf

Definisi 2.1 (Thulasiraman dkk, 2016:4)
Sebuah graf G terdiri dari sepasang (V,E) dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan tak berurut dari elemen yang berbeda dari V. Elemen-elemen dari E disebut sisi dari graf G. Jika $e = \{u, v\} \in E$*,sisi e dikatakan menghubungkan **(join)** titik u dan titik v. Titik* u *dan titik* v *merupakan titik-titik akhir sisi* e*. Sisi e juga ditulis* $e = uv$ *dan titik u dan titik v dikatakan berhubungan langsung **(adjacent)**. Sisi e dan titik u terkait **(incident)** satu sama lain. Jika dua sisi berbeda* e_1 *dan* e_2 *terkait dengan titik yang sama, maka* e_1 *dan* e_2 *dikatakan sisi yang berhubungan langsung **(adjacent edges)**. Sebuah graf dengan n titik dan m sisi disebut* (n, m) *graf. Jumlah titik di G disebut order dari G. Jumlah sisi di G disebut size dari G.*

Definisi 2.2 (Munir, 2010:356)
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ *yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertice atau node) dan E adalah himpunan sisi (edge atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.*

Sebuah graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dimana setiap titik digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis). Misalnya, sebuah graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv$, $e_2 = vw$, $e_3 = wx$, $e_4 = ux$ dan $e_5 = uw$ dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram seperti tampak pada Gambar 1(a). Sedangkan, graf H dengan $V(H) = \{p, q, r, s, t\}$ dan $E\{H\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dimana $e_1 = pq$, $e_2 = qr$, $e_3 = rs$, $e_4 = rs$, $e_5 = pr$, $e_6 = ps$, $e_7 = qt$, $e_8 = rr$ dan dapat dipresentasikan seperti terlihat pada Gambar 1(b).



Gambar 1

Sebuah sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut **gelung (*loop*)** (Budayasa, 2010). Misalnya, sisi e_8 di graf H pada Gambar 1(b) adalah sebuah gelung. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan titik u dan titik v pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi-rangkap/sisi-ganda (*multiple-edges*)** (Budayasa, 2010). Misalnya, sisi-sisi e_3 dan e_4 di graf H pada Gambar 1(b) adalah sisi-sisi rangkap. Graf yang tidak memiliki sisi rangkap dan tidak memiliki gelung disebut **graf sederhana** (Budayasa, 2010). Sedangkan sebuah graf yang memiliki sisi-rangkap dan tidak memiliki gelung disebut **graf rangkap (*multi graph*)** (Budayasa, 2010). Sebagai contoh, graf G pada Gambar 1(a) adalah sederhana, sedangkan graf H pada gambar 1(b) bukan graf sederhana.

2. Jalan (walk), Jejak (trail), Lintasan (path), Sirkit dan Sikel (cycle)

Definisi 2.3 (Budhayasa, 2007:6)
Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah ***jalan (walk)*** *di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong)* $W = (v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots\ v_{k-1}\ e_k\ v_k)$ *yang suku-sukunya bergantian titik-titik akhir sisi* e_i*, untuk* $1 \leq i \leq k$. W *adalah sebuah jalan dari titik* v_0 *ke titik* v_k*, atau jalan-*(v_0, v_k)*. Titik* v_0 *dan titik* v_k *berturut-turut disebut* ***titik awal dan titik akhir*** $\boldsymbol{W}$*. Sedangkan titik-titik* $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ *disebut* ***titik-titik internal*** $\boldsymbol{W}$ *dan* k *disebut* ***panjang jalan*** $\boldsymbol{W}$*. Jika semua sisi* $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ *dalam jalan* W *berbeda maka* W *disebut* ***jejak (trail)*** *dan jika semua titik* $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ *dalam jalan* W *juga berbeda maka* W *disebut sebagai* ***lintasan (path)****. Sebuah jejak* W *disebut sebagai* ***sirkit*** *atau jejak tertutup jika titik awal dan titik akhir dari* W *adalah sama. Sebuah* ***sikel (cycle)*** *adalah sebuah jejeka tertutup yang titik internalnya berbeda-beda.*

Definisi 2.4 (Budhayasa, 2007:8)
Sebuah graf G *dikatakan* ***terhubung (connected)*** *jika untuk setiap dua titik di* G *yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Definisi 2.5 (Lee, 2005:61)
Lintasan dengan panjang n dalam graf didefinisikan oleh sebuah relasi $E \subseteq V \times V$ *adalah sebuah barisan berhingga dari* $p = a, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, b$ *dimana setiap elemen harus ditulis* $a\ E\ v_1, v_1\ E\ v_2, \ldots, v_{n-1}\ E\ b$ *dimana* $a, b, v_i \in V, i = 1,2, \ldots, n-1$*. Tambahan, ketika n adalah sebuah bilangan bulat positif.*

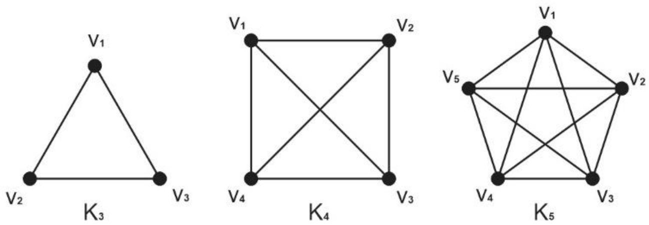
1) *Relasi* E^n *pada V didefinisikan* $x\ E^n\ y$*, berarti terdapat sebuah lintasan dengan panjang n dari titik x ke titik y.*
2) *Relasi* E^∞ *pada V didefinisikan* $x\ E^\infty\ y$*, berarti terdapat sebuah lintasan dari x ke y, yaitu terdapat* $x\ E\ y$ *atau* $x\ E^2\ y$ *atau* $x\ E^3\ y$ *atau ... dan relasi* E^∞ *adalah ketercapaian relasi dan dinotasikan sebagai* $x\ R^\infty\ y$*.*
3) *Ketercapaian relasi* E^∞ *dapat diinterpretasikan sebagai keterhubungan relasi dari V*

3. Beberapa Jenis Graf

a. Graf Komplit atau Graf Lengkap

Definisi 2.6 (Balakrishnan, 2012:6)
Sebuah graf sederhana G *dengan* n *titik dikatakan komplit jika setiap dua titik berbeda dari* G *terhubung dalam* G *dan graf komplit dengan* n *titik dinotasikan dengan* K_n*.*

Contoh:

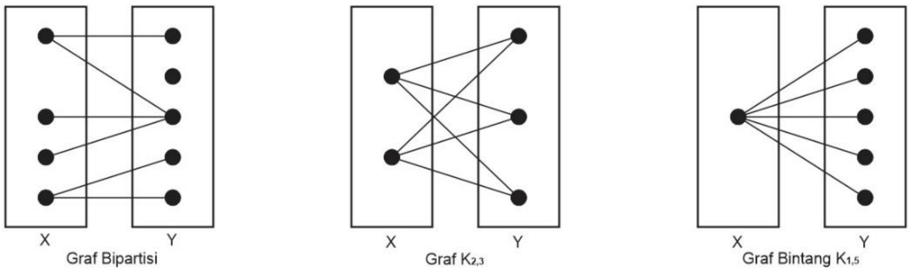


Gambar 2

b. Graf Bipartisi dan Graf Bipartisi Komplit

Definisi 2.7 (Balakrishnan, 2012:7)
Sebuah graf adalah trivial jika hanya memiliki sebuah titik dan tidak memiliki sisi. Sebuah graf adalah bipartisi jika himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam dua himpunan bagian tidak kosong X dan Y sehingga setiap sisi dari G memiliki satu titik akhir di X dan titik akhir lainnya di Y. Pasangan (X,Y) disebeut sebuah bipartisi dari graf bipartisi. Graf bipartisi G dengan bipartisi (X,Y) dinotasikan G(X,Y). Sebuah graf bipartisi yang merupakan graf sederhana adalah komplit jika setiap titik dari X terhubung ke setiap titik di Y. Jika G(X,Y) adalah komplit dengan $|X| = p$ *dan* $|Y| = q$*, maka G(X,Y) dinotasikan* $K_{p,q}$*. Sebuah graf bipartisi komplit* $K_{1,q}$ *disebut graf bintang.*

Contoh:



Gambar 3

4. Derajat Titik Graf

Definisi 2.8 (West, 2001:34)
Derajat dari titik v dalam sebuah graf G, dituliskan $d_G(v)$ *atau* $d(v)$ *adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v, kecuali gelung yang terkait pada v dihitung dua. derajat maksimum adalah* $\Delta(G)$*, derajat ,minimum adalah* $\delta(G)$*, dan G adalah graf reguler jika* $\Delta(G) = \delta(G)$*.G adalah reguler-k jika setiap derajat titiknya adalah k. ketetanggaan (**brotherhood**)dari v dituliskan* $N_G(v)$ *atau* $N(v)$ *adalah himpunan titik yang terhubung langung ke v.*

Teorema 2.1 (Budhayasa, 2007:11)
Misalkan $G:(V,E)$ adalah sebuah graf, maka

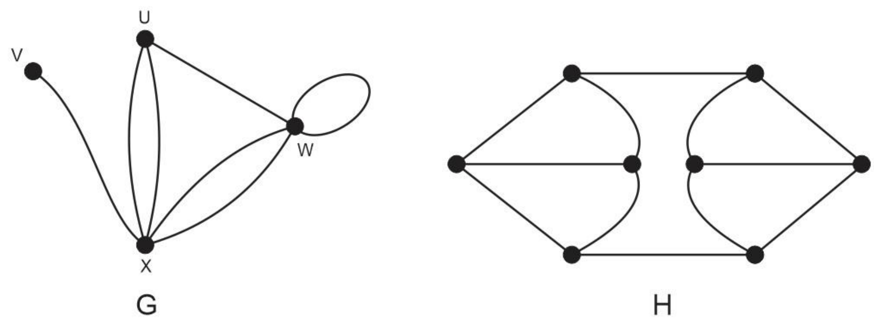
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$$

Bukti:

Dalam menghitung jumlah derajat semua titik di sebuah graf, setiap sisi graf dihitung tepat dua kali, maka jumlah derajat semua titik pada graf selalu sama dengan dua kali banyaknya sisi pada graph tersebut, sehingga dapat dibuat sebuah teorema yang disebut dengan Teorema Jabat Tangan.

Definisi 2.9 (Lipschutz, 2007:162)
Sebuah graf G adalah reguler derajat k atau reguler-k jika setiap titik memiliki derajat k. Dengan kata lain sebuah graph adalah reguler jika setiap titik memiliki derajat yang sama.

Contoh:



Gambar 4

Pada Gambar 4 dapat terlihat bahwa derajat titik-titik dari graf G adalah $d(u) = 3$, $d(v) = 1$, $d(w) = 5$, $d(x) = 5$, $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 5$, serta $N(x) = \{u, v, w\}$. Dari Gambar 4 juga menunjukkan bahwa graf H adalah graf reguler-3.

B. Himpunan Fuzzy

1. Pengantar Himpunan

Definisi 2.10 (Tahmir, 2004:1)
Suatu koleksi (kumpulan) objek yang didefinisikan dengan baik (well define) disebut himpunan. Objek dalam suatu himpunan disebut anggota (atau elemen atau unsur).

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa suatu himpunan merupakan sebuah daftar, kumpulan atau kelas objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. anggota dari suatu himpunan dapat berupa objek apa saja. Objek-objek ini disebut elemen-elemen atau unsur-unsur dari suatu himpunan. Suatu himpunan dapat didefinisikan dengan menyatakan secara jelas atau mendaftarkan semua anggota-anggotanya. Metode pendefinisian yang demikian disebut metode tabulasi (Abdy, 2008:1). Himpunan yang didefinisikan dengan menyatakan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh elemen-elemennya disebut metode kaidah (Abdy, 2008:1). Metode tabulasi hanya dapat digunakan untuk mendefinisikan himpunan-himpunan yang elemen-elemennya berhingga, sedangkan metode kaidah dapat digunakan untuk himpunan-himpunan yang elemen-elemennya berhingga maupun tak berhingga. Selain metode tabulasi dan metode kaidah terdapat metode lain yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan yaitu metode keanggotaan. Metode ini menggunakan fungsi nol-satu (fungsi karakteristik), yang dinyatakan dengan $\mu_{\boldsymbol{A}}$ (Abdy, 2008:1) . Fungsi $\mu_{\boldsymbol{A}}$ ini memetakan anggota-anggota himpunan semesta $\boldsymbol{U}$ ke himpunan $\{0,1\}$, yaitu:

$$\mu_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{U} \to \{0,1\}, \text{ sedemikian sehingga:}$$

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 1 & Jika\ x \in A \\ 0 & Jika\ x \notin A \end{cases}, \forall\, x \in \boldsymbol{U}$$

Fungsi $\mu_{\boldsymbol{A}}$ disebut fungsi keanggotaan sedangkan nilai dari $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ untuk $x \in \boldsymbol{U}$ disebut derajat keanggotaan. Apabila $\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = 1$ maka x merupakan elemen dari himpunan $\boldsymbol{A}$, dan apabila $\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = 0$ maka x bukan merupakan elemen dari himpunan $\boldsymbol{A}$.

Dari pendefinisian himpunan, terlihat bahwa keanggotaan suatu elemen dalam suatu himpunan sangatlah jelas atau tegas, yaitu merupakan elemen himpunan atau bukan merupakan elemen himpunan. Oleh karena itu, himpunan biasa (himpunan yang dikenal sebelum dikenalnya himpunan fuzzy) dinamakan himpunan tegas. Penamaan ini muncul setelah diperkenalkannya himpunan fuzzy.

Adapun beberapa operasi-operasi penting pada himpunan tegas dengan menggunakan fungsi keanggotaan adalah sebagai berikut (Abdy, 2008:3) :

a. Komplemen

Misalkan himpunan $\mathbf{A} \subset \mathbf{U}$. Komplemen dari $\mathbf{A}$ ditulis sebagai $\mathbf{A^c}$. Jika $x \in \mathbf{A}$ maka $x \notin \mathbf{A}$ dan sebaliknya, sehingga kita dapat menyatakan bahwa :

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = 1 \text{ jika dan hanya jika } \mu_{\mathbf{A}^c}(x) = 0$$
atau
$$\mu_{\mathbf{A}^c}(x) = 1 \text{ jika dan hanya jika } \mu_{\mathbf{A}}(x) = 0$$

Secara singkat kita dapat menyatakan

$$\mu_{\mathbf{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathbf{A}}(x), \forall x \in \mathbf{U}$$

b. Irisan dan Gabungan

Misalkan himpunan $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{U}$. Irisan dan gabungan himpunan $\boldsymbol{A}$ dan himpunan $\boldsymbol{B}$ berturut-turut adalah $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$. Dengan menggunakan fungsi keanggotaan, dapat dituliskan :

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 1 & jika\ x \in \boldsymbol{A} \\ 0 & jika\ x \notin \boldsymbol{A} \end{cases}, \mu_{\boldsymbol{B}}(x) = \begin{cases} 1 & jika\ x \in \boldsymbol{B} \\ 0 & jika\ x \notin \boldsymbol{B} \end{cases} \forall x \in \boldsymbol{U}$$

Sehingga,

$$\mu_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & x \in (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \\ 0 & x \notin (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \end{cases} \forall x \in \boldsymbol{U}$$

dan

$$\mu_{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & x \in (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \\ 0 & x \notin (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \end{cases} \forall x \in \boldsymbol{U}$$

Dari nilai derajat keanggotaan $\mu_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(x)$, terlihat bahwa nilainya adalah sama dengan satu apabila $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ dan $\mu_{\boldsymbol{B}}(x)$ masing-masing bernilai satu, dan sebaliknya bernilai sama dengan nol apabila salah satu atau kedua $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ dan $\mu_{\boldsymbol{B}}(x)$ bernilai nol, sehingga dapat dinyatakan bahwa :

$$\mu_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}(x) = \min\big(\mu_{\boldsymbol{A}}(x), \mu_{\boldsymbol{B}}(x)\big), \forall x \in \boldsymbol{U}$$

Selanjutnya, dari nilai derajat kenggotaan $\mu_{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}(x)$, terlihat bahwa nilainya sama dengan satu apabila salah satu atau kedua $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ dan $\mu_{\boldsymbol{B}}(x)$ bernilai satu, dan sebaliknya bernilai sama dengan nol apabila $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ dan $\mu_{\boldsymbol{B}}(x)$ bernilai nol, sehingga dapat dinyatakan bahwa:

$$\mu_{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}} = \max\big(\mu_{\boldsymbol{A}}(x), \mu_{\boldsymbol{B}}(x)\big), \forall x \in \boldsymbol{U}$$

c. Selisih dan Jumlah Disjungtif

Misalkan himpunan $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{U}$. Selisih dan jumlah disjungtif dari himpunan $\boldsymbol{A}$ dan himpunan $\boldsymbol{B}$ berturut-turut adalah $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}^c$ dan $\boldsymbol{A} \mp \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}^c) \cup (\boldsymbol{A}^c \cap \boldsymbol{B})$. Apabila kita menggunakan derajat keanggotaan, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ dapat dinyatakan sebagai:

$$
\begin{aligned}
\mu_{(A-B)}(x) \quad &= \mu_{(A\cap B^c)}(x) \\
&= \min\left[\mu_{(A\cap B^c)}(x) \cup \mu_{(A^c\cap B)}(x)\right], \forall x \in \boldsymbol{U}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, jumlah disjungtif dapat dinyatakan sebagai:

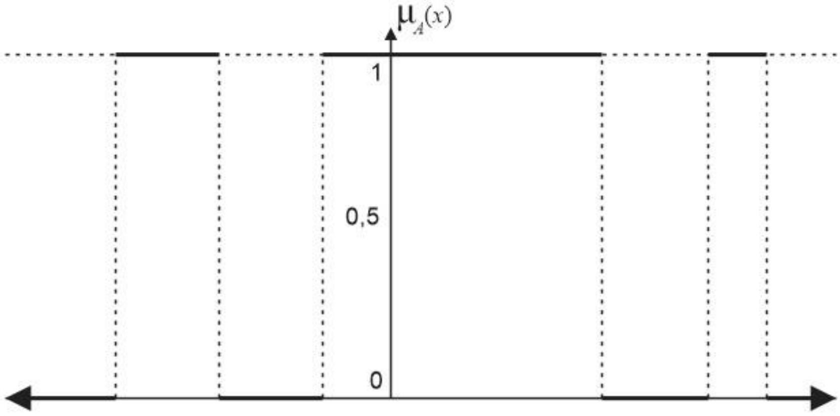
$$
\begin{aligned}
\mu_{(A\mp B)}(x) \quad &= \mu_{(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)}(x) \\
&= \max\left[\mu_{(A\cap B^c)}(x), \mu_{(A^c\cap B)}(x)\right] \\
&= \max\left[\mu_{(A-B)}(x), \mu_{(B-A)}(x)\right], \forall x \in \boldsymbol{U}
\end{aligned}
$$

2. Himpunan Fuzzy

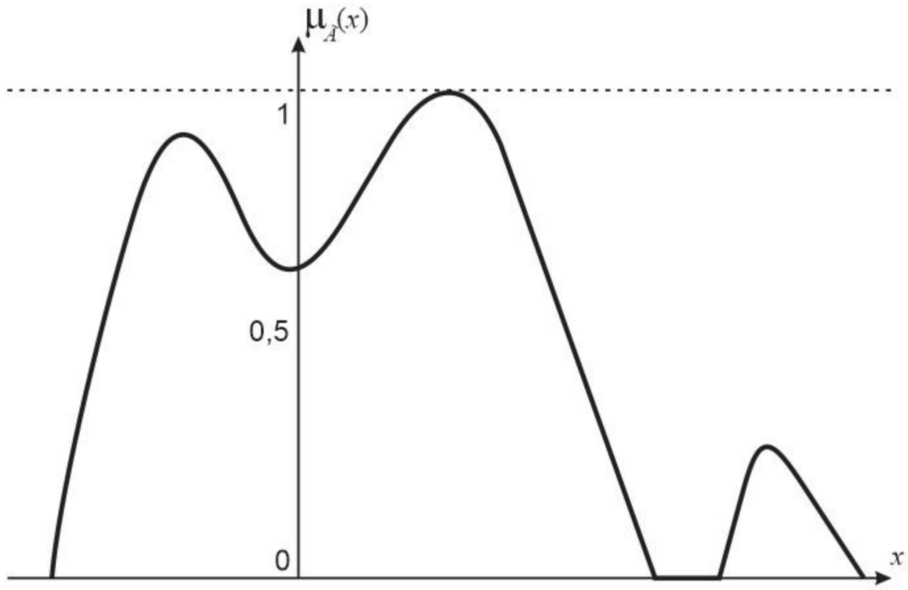
Definisi 2.11 (Abdy, 2008:6)
Misalkan $\boldsymbol{U}$ *adalah suatu himpunan semesta dengan* $x \in \boldsymbol{U}$*. Suatu himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *dalam* $\boldsymbol{U}$ *adalah himpunan pasangan-pasangan terurut elemen x dengan derajat keanggotaannya, yaitu:*

$$\tilde{A} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) | x \in \boldsymbol{U}, \mu_{\tilde{A}}(x) = [0,1]\right\}$$

$\mu_{\tilde{A}}$ merupakan fungsi keanggotaan yang memetakan setiap $x \in \boldsymbol{U}$ ke interval $[0,1]$. Nilai dari $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dalam interval $[0,1]$ disebut nilai keanggotaan atau derajat keanggotaan dari elemen x dalam $\tilde{A}$, sedangkan interval $[0,1]$ sendiri disebut ruang keanggotaan. Pada himpunan tegas, anggota dari ruang keanggotaanya hanyalah nol dan satu, sehingga himpunan fuzzy merupakan perluasan dari himpunan tegas. Derajat keanggotaan menunjukkan besarnya keterlibatan suatu anggota dalam suatu himpunan. Pada Gambar 5 memperlihatkan suatu grafik fungsi keanggotaan himpunan tegas, dan Gambar 6 memperlihatkan suatu grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy dalam $\mathbb{R}$.



Gambar 5



Gambar 6

Himpunan fuzzy dapat dinyatakan dengan dua cara, yaitu secara ekstensional dan intensional. Cara ekstensional dilakukan dengan menyebutkan satu persatu derajat keanggotaan masing-masing anggota himpunan, sedangkan cara intensional dilakukan dengan mendefinisikan fungsi keanggotaan secara matematis. Cara ekstensional hanya dapat dilakukan jika anggota dari himpunan adalah diskrit dan berhingga, sedangkan cara intensional dipakai untuk himpunan-himpunan yang kontinu dan berhingga maupun tak berhingga.

3. Konsep Dasar dan Istilah Dalam Himpunan Fuzzy

Definisi 2.12 (Abdy, 2008:10)
*Support dari suatu himpunan kabur $\tilde{A}$, yaitu $S(\tilde{A})$ adalah himpunan semua elemen x dalam **U** yang derajat keanggotaanya dalam $\tilde{A}$ lebih besar dari nol, yaitu:*

$$S(\tilde{A}) = \{x \in \boldsymbol{U} | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Support dari suatu himpunan kabur merupakan suatu himpunan biasa.

Contoh:

Support untuk himpunan kabur

$$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

adalah

$$S(\tilde{A}) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Definisi 2.13 (Abdy, 2008:11)
*Potongan-α (α-cut) dari suatu himpunan kabur $\tilde{A}$, yaitu A_α adalah himpunan semua elemen x dalam **U** yang derajat keanggotaannya dalam $\tilde{A}$ lebih besar atau sama dengan suatu nilai α yang ditentukan,$\alpha \in [0,1]$:*

$$A_\alpha = \{x \in \boldsymbol{U} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, \alpha \in [0,1]\}$$

Apabila derajat keanggotaan $x \in \boldsymbol{U}$ dalam himpunan kabur $\tilde{A}$ lebih besar dari nilai α yang ditentukan, yaitu:

$$A'_\alpha = \{x \in \boldsymbol{U} | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha, \alpha \in [0,1]\}$$

maka A_α merupakan potongan α kuat (strong α-cut). Himpunan A_α dan A'_α merupakan himpunan biasa.

Definisi 2.14 (Abdy, 2008:11)
Suatu himpunan kabur disebut konveks jika dan hanya jika potongan potongan-αnya merupakan suatu himpunan konveks untuk sebarang $\alpha \in [0,1]$.

Definisi 2.15 (Abdy, 2008:12)
*Inti (core) dari himpunan kabur $\tilde{A}$, yaitu inti $(\tilde{A})$ adalah himpunan semua elemen x dalam **U** sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{A}}$, atau dapat inyatakan sebagai berikut*

$$inti(\tilde{A}) = \{x \in \boldsymbol{U} | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Definisi 2.16 (Abdy, 2008:13)
Tinggi (heigt) dari suatu himpunan kabur$\tilde{A}$*, yaitu tinggi* $(\tilde{A})$ *adalah derajat keanggotaan terbesar yang dicapai oleh suatu elemen x dalam*$(\tilde{A})$*.*

$$Tinggi(\tilde{A}) = \max_{x \in \boldsymbol{U}} [\mu_{\tilde{A}}(x)]$$

Definisi 2.17 (Abdy, 2008:13)
Titik silang (crossover point) dari suatu himpunan kabur $\tilde{A}$*, yaitu Crossover*$(\tilde{A})$ *adalah himpunan semua elemen x dalam* $\boldsymbol{U}$*, sedemikian sehingga* $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0{,}5$*, yaitu :*

$$Crossover(\tilde{A}) = \{x \in \boldsymbol{U} | \mu_{\tilde{A}}(x) = 0{,}5\}$$

Definisi 2.18 (Abdy, 2008:13)
Titik tunggal (singleton) adalah himpunan kabur yang supportnya tunggal.

Definisi 2.19 (Abdy, 2008:14)
Kardinalitas dari suatu himpunan kabur berhingga $\tilde{A}$ *didefinisikan sebagai*

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in \boldsymbol{U}} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Sedangkan kardinalitas relatif dari himpunan kabur berhingga didefnisikan sebagai

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|\boldsymbol{U}|}$$

Jika $\boldsymbol{U}$ *tak berhingga, maka kardinalitas* $\tilde{A}$ *adalah*

$$|\tilde{A}| = \int_{x} \mu_{\tilde{A}}(x) dx$$

Berdasarkan definisi di atas, kardinalitas relatif himpunan fuzzy sangat bergantung pada kardinalitas himpunan semestanya, oleh karena itu untuk membandingkan himpunan-himpunan kabur dengan menggunakan kardinalitas relatifnya maka himpunan kebur tersebut haruslah dalam himpunan semesta yang sama.

4. Operasi-operasi Dasar Himpunan Fuzzy

Operasi-operasi pada himpunan fuzzy merupakan perluasan dari operasi-operasi himpunan biasa. Untuk pendefinisian berikut, himpunan fuzzy $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, dan $\tilde{C}$ merupakan himpunan fuzzy dalam himpunan semesta $\boldsymbol{U}$.

a. Kesamaan

Definisi 2.20 (Abdy, 2008:14)
$\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}\ \forall x \in \boldsymbol{U}$. Jika $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}\ \forall x \in \boldsymbol{U}$, maka dikatakan bahwa $\tilde{B}$ termuat dalam $\tilde{A}$ dan jika $\mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}}, \forall x \in \boldsymbol{U}$ maka dikatakan bahwa $\tilde{A}$ termuat dalam $\tilde{B}$.

b. Gabungan

Definisi 2.21 (Abdy, 2008:14)
Gabungan dari himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, yaitu $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ mempunyai keanggotaan yang didefinsikan sebagai:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\,, x \in \boldsymbol{U}$$

$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ merupakan himpunan fuzzy terkecil yang mengandung $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

c. Irisan

Definisi 2.22 (Abdy, 2008:15)
Irisan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, yaitu $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ mempunyai fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\,, x \in \boldsymbol{U}$$

$\tilde{A} \cap \tilde{B}$ merupakan himpunan fuzzy terbesar yang terkandung dalam $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

d. Komplemen

Definisi 2.23 (Abdy, 2008:16)
Komplemen dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yaitu $\tilde{A}^c$ mempunyai fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), x \in \boldsymbol{U}$$

e. Selisih dan Jumlah Disjungtif

Definisi 2.24 (Abdy, 2008:17)
Selisih dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$, dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}} = min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}^c}(x)]$$

$$= min[\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

Adapun jumlah disjungtif dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah $\tilde{A} \mp \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}^c\right) \cup \left(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}\right)$, dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\tilde{A}\mp\tilde{B}}(x) = max[\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}^c}(x), \mu_{\tilde{A}^c\cap\tilde{B}}(x)]$$

$$= max[\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{B}-\tilde{A}}(x)], x \in \boldsymbol{U}$$

5. Relasi Fuzzy pada Himpunan Fuzzy

Definisi 2.25 (Lee, 2005:69)
Relasi fuzzy memiliki derajat keanggotaan dengan nilai $[0,1]$.

$$\mu_R: A \times B \to [0,1]$$

$$R = \left\{\left((x, y), \mu_R(x, y)\right) | \mu_R(x, y) \geq 0, x \in A, y \in B\right\}$$

Definisi 2.26 (Lee, 2005:75)
Dua relasi fuzzy R dan S didefinisikan pada himpunan A, B dan C yaitu $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Komposisi $S \circ R = SR$ dari dua relasi R dan S dinyatakan oleh relasi dari A ke C, lalu komposisi ini didefinisikan sebagai berikut:

$$untuk\ (x, y) \in A \times B, (y, z) \in B \times C$$

$$\mu_{S\circ R}(x, z) = Max\left[Min\left(\mu_R(x, y), \mu(y, z)\right)\right]$$

Definisi 2.27 (Chakraborty, 1983)
Sebuah relasi fuzzy biner $\tilde{R}$ dari sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ ke sebuah himpunan fuzzy $\tilde{B}$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{R}(x, y) \leq \left(\tilde{A} \times \tilde{B}\right)(x, y) = min\left\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\right\}$$

$\tilde{R}$ adalah simetris jika $\tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$ untuk semua $x, y \in A$

C. Penelitian Terdahulu

Setelah diperkenalkannya teori fuzzy maka banyak ilmu dalam matematika yang pada awalnya menggunakan himpunan tegas (*crisp*) dikaji dengan mengganti himpunan tegas menjadi himpunan fuzzy**.**

1. *Fuzzy Groups* oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1971.

Pada penelitian Rosenfeld memperkenalkan definisi dari subgrup fuzzy dengan terlebih dahulu memperkenalkan definisi subgrupoid fuzzy. Berawal dari suatu grupoid katakana P, dibentuk himpunan fuzzy dari S sehingga dimiliki bentuk subgrupoid fuzzy dengan fungsi $\mu: S: \to [0,1]$.

2. The *Fuzzy Integral* oleh Dan Ralescu dan Gregory Adams pada tahun 1980.

Pada penelitian Dan Ralescu dan Gregory Adams mendefinisikan integral fuzzy dari sebuah fungsi positif, fungsi terukur berhubungan dengan ukuran kabur. Mereka menunjukkan teorema konvergen dan lemma Fato’s masih berlaku dalam pengaturan baru ini. Mereka mempelajari beberapa sifat-sifat dari integral dan menunjukkan kesesuaian dengan integral fuzzy yang didefinisikan dalam literature. Hasil utama dari penelitian ini adalah teorema konvergen.

3. *On* Regular *Fuzzy Graphs* oleh A. Nagoor Gani dan K. Radha pada tahun 2008

Pada penelitian ini, fuzzy reguler, derajat total dan graf fuzzy total reguler diperkenalkan. Graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler adalah komparasi melalui berbagai contoh. Ditunjukkan sebuah kondisi yang diperlukan agar graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler dianggap ekivalen. Ditunjukkan juga sebuah graf fuzzy reguler pada graf sikel. Serta beberapa sifat-sifat dari graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Pendalaman konsep suatu dalil dengan menggunakan literatur-literatur yang berhubungan dengan teori graf dan teori fuzzy dan mencoba untuk mengaplikasikannya pada graf fuzzy dengan menggunakan jenis penelitian dasar/murni.

B. Waktu Penelitian

Penelitian ini mulai dilaksanakan sejak bulan Oktober 2016 sampai bulan Maret 2017.

C. Fokus Kajian

Fokus kajian dalam penelitian ini terletak pada konsep dan sifat dasar dalam graf fuzzy

D. Materi Pendukung

Materi pendukung yang dikumpulkan penulis berupa pengalaman penulis tentang teori graf dan teori fuzzy yang penulis dapatkan selama perkuliahan dan literatur-literatur yang tersedia baik itu di perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA UNM maupun literatur dari internet.

E. Indikator Penelitian

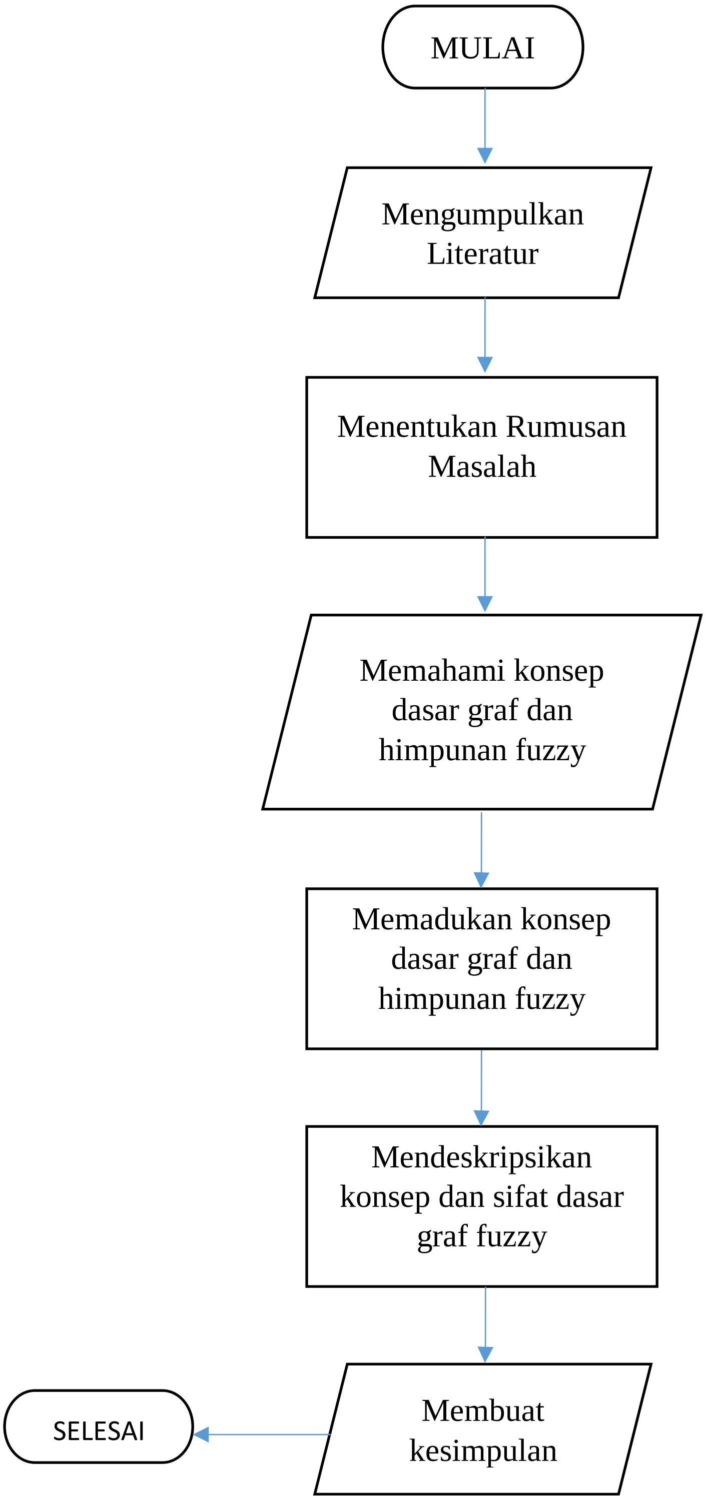
Indikator keberhasilan dalam penelitian ini adalah mahasiswa dapat mengetahui konsep dasar graf fuzzy pada derajat titik graf fuzzy dan graf fuzzy reguler serta sifat-sifatnya.

F. Prosedur Penelitian

Tahap-tahap yang dilakukan peneliti yaitu:

1. Mengumpulkan literatur mengenai konsep dan sifat dasar graf fuzzy
2. Menentukan rumusan masalah berdasar pada literatur-literatur yang telah dikumpulkan
3. Mendeskripsikan konsep dan sifat dasar graf fuzzy:
    a. Memahami konsep dasar graf
    b. Memahami konsep dasar himpunan fuzzy
    c. Memadukan konsep dasar graf dan konsep dasar himpunan fuzzy
    d. Mendeskripsikan konsep dasar graf fuzzy
    e. Mendeskripsikan graf fuzzy reguler
    f. Mendeskripsikan sifat-sifat dasar graf fuzzy reguler
4. Membuat simpulan berdasarkan rumusan masalah

G. Skema Penelitian



Gambar 7

Keterangan:

 = Mulai atau Selesai

 = Masukan atau keluaran

 = Proses

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan kajian pustaka dan beberapa literatur, pada bab ini dibahas tentang konsep dasar graf fuzzy dan konsep dasar graf fuzzy reguler serta sifat-sifat dasar graf fuzzy regular.

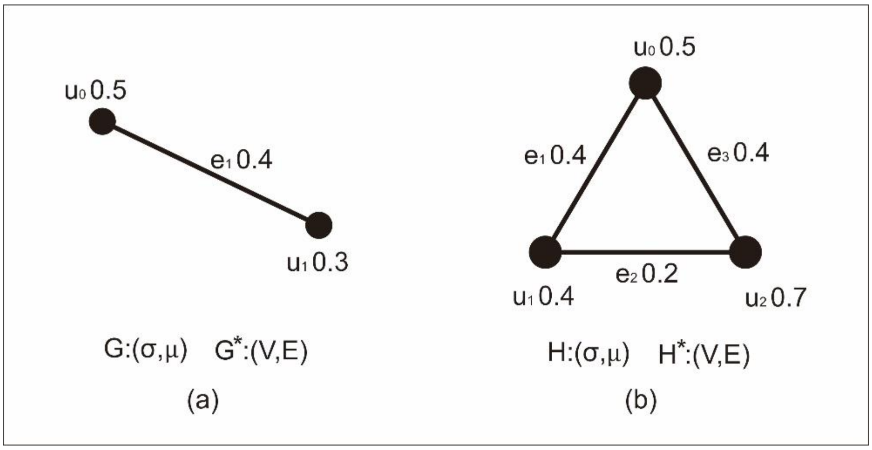
A. Hasil Penelitian

Dalam penelitian ini perlu diperhatikan beberapa hal yang akan sering digunakan**.** Berdasarkan Definisi 2.1 maka sebuah graf G terdiri dari sepasang (V, E) dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan tak berurut dari elemen yang berbeda dari V. Elemen-elemen dari E disebut sisi dari graf G. Graf dengan himpunan tegas dan graf dengan himpunan fuzzy dibedakan menjadi graf tegas dan graf fuzzy.

1. Konsep Dasar Graf Fuzzy

Definisi 2.1 menjelaskan bahwa sebuah graf tegas G terdiri dari sepasang (V, E) dimana V adalah himpunan berhingga titik-titik tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang merupakan relasi antara dua titik elemen V di G atau bisa dituliskan $E \subseteq V \times V$, sehingga untuk mendefinisikan sebuah graf fuzzy maka V dan E diubah menjadi himpunan fuzzy sehingga setiap titik-titik di V memiliki derajat keanggotaan dengan interval $[0,1]$ dan setiap sisi-sisi di E memiliki derajat keanggotaan dengan interval $[0,1]$, sisi-sisi di E merupakan relasi antara dua titik di G diubah menjadi sebuah relasi fuzzy simetris, maka dari itu dibuatlah sebuah definisi untuk mendefinisikan sebuah graf fuzzy dengan memadukan Definisi 2.1, Definisi 2.10 dan Definisi 2.27.

Definisi 4.1 (Gani, 2008)
Sebuah graf fuzzy G adalah sebuah pasangan fungsi $G: (\sigma, \mu)$ dimana σ adalah sebuah himpunan bagian fuzzy dari sebuah himpunan tak kosong V dan μ adalah sebuah relasi fuzzy simetris pada σ. Graf pokok dari $G: (\sigma, \mu)$ dinotasikan oleh $G^{*:}(V, E)$ dimana $E \subseteq V \times V$. $\sigma = [0,1]$ untuk setiap $u \in V$ dan $\mu(uv) = [0,1]$ untuk setiap $u, v \in V$ dimana $uv \in E$, serta $\mu(uv) \leq Min(\sigma(u), \sigma(v))$ untuk setiap $u, v \in V$ dimana $uv \in E$ adalah sis penghubungi antara u dan v.



Gambar 8

Pada Gambar 8(a) diperlihatkan sebuah contoh bukan graf fuzzy karena $\mu(u_0u_1) = 0.4 \nleq 0.3 = Min(\sigma(u_0), \sigma(u_1))$, maka $G: (\sigma, \mu)$ pada $G^*: (V, E)$ bukanlah sebuah graf fuzzy. Pada Gambar 8(b) diperlihatkan sebuah contoh graf fuzzy $H: (\sigma, \mu)$ pada $H^*: (V, E)$ dengan $\mu(uv) \leq Min(\sigma(u), \sigma(v)), \forall u, v \in V$.

Graf fuzzy juga memiliki Order dan Size sebagaimana graf tegas. Dari Definisi 2.1 diketahui bahwa order dari sebuah graf tegas $G: (V, E)$ adalah jumlah titik di G atau bisa dikatakan sebagai kardinalitas dari V yaitu $|V|$ dan dari Definisi 2.1 diketahui juga bahwa size dari sebuah graf tegas $G: (V, E)$ adalah jumlah sisi di G atau bisa dikatakan sebagai kardinalitas dari E yaitu $|E|$, sehingga Order dan Size dari sebuah graf fuzzy dapat didefinisikan dengan menggunakan kardinalitas sebuah himpunan fuzzy seperti dijelaskan pada Definisi 2.19, maka dari itu dibuatlah sebuah definisi dengan memadukan Definisi 2.1 dan Definisi 2.19.

Definisi 4.2 (Gani, 2008)
Order dari sebuah graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada $G^*:(V,E)$ adalah

$$O(G)=\sum_{u\in V}\sigma(u)$$

Size dari sebuah graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada $G^*:(V,E)$ adalah

$$S(G)=\sum_{uv\in E}\mu(uv)$$

Pada Gambar 8(b) diperlihatkan sebuah graf fuzzy $H:(\sigma,\mu)$ pada $H^*:(V,E)$ dengan,

$$O(H)=\sigma(u_0)+\sigma(u_1)+\sigma(u_2)=0.5+0.4+0.7=1.6$$

$$S(H)=\mu(u_0u_1)+\mu(u_1u_2)+\mu(u_2u_0)=0.4+0.2+0.4=1.$$

Sebuah lintasan pada sebuah graf tegas dapat diinterpretasikan sebagai sebuah relasi komposisi, maka untuk mendefinisikan sebuah lintasan pada sebuah graf fuzzy diperlukan untuk mendefinisikan kekuatan keterhubungan dari lintasan tersebut yang tidak lain merupakan derajat keanggotaan komposisi relasi fuzzy, dari perpaduan Definisi 2.5 dan Definisi 2.26 maka dapat didefinisikan kekuatan keterhubungan dari suatu lintasan pada sebuah graf fuzzy.

Definisi 4.3 (Gani, 2008)
Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada $G^*:(V,E)$. Kekuatan keterhubungan dari sebuah lintasan-(u,v) dengan panjang n pada G didenisikan sebagai

$$\mu^n(u,v)=Max\left[Min\big(\mu(uu_1),\mu(u_1u_2),\dots,\mu(u_{n-1},v)\big)\right]$$

Sebagai contoh kekuatan keterhubungan dari suatu graf fuzzy, perhatikan Gambar 8(b). Pada Gambar 8(b) terdapat sebuah lintasan-(u_0, u_2) dengan lintasan (u_0, u_1, u_2) dan panjang dua maka kekuatan keterhubungan dari lintasan-(u_0, u_2) dengan panjang dua adalah

$\mu^2(u_0, u_2) = Max\left[Min\big(\mu(u_0u_1), \mu(u_1u_2)\big)\right]$

$\mu^2(u_0, u_2) = Max[Min(0.4, 0.2)]$

$\mu^2(u_0, u_2) = Max[0.2] = 0.2$

sehingga kekuatan keterhubungan lintasan-(u_0, u_2) adalah 0.2.

Dari Definisi 4.3 diketahui bahwa kekuatan dari sebuah lintasan-(u_0, u_n) adalah nilai μ terkecil yang berada pada lintasan-(u_0, u_n). Definisi 4.3 dapat dikembangkan untuk mengetahui kekuatan keterhubungan antara dua titik pada sebuah graf fuzzy.

Definisi 4.4 (Gani, 2008)
Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada $G^*: (V, E)$. Kekuatan keterhubungan antara dua titik u dan v dimana $u, v \in V$ didefiniskan sebagai kekuatan terbesar dari semua lintasan yang menghubungkan u dan v atau dapat ditulis:

$$\mu^\infty(u, v) = Max[\mu^n(u, v) | n = 1,2,3, \dots]$$

Dari Definisi 4.4 diketahui bahwa kekuatan keterhubungan antara dua titik pada sebuah graf fuzzy adalah kekuatan terbesar diantara semua lintasan-lintasan yang menghubungkan antara titik-titik pada graf fuzzy yang dimaksud. Pada Gambar 8(b) dapat dilihat terdapat dua lintasan yang menghubungkan titik u_0 dan titik u_2 yaitu lintasan (u_0, u_1, u_2) dan lintasan (u_0, u_2) maka kekuatan keterhubungan titik u_0 dan titik u_1 pada graf fuzzy H adalah $\mu^\infty(u_0, u_1) = Max[\mu^2(u_0, u_2), \mu(u_0, u_2)] = Max[0.2, 0.4] = 0.4$

Definisi 4.5 (Mathew dan Sunitha, 2013)
Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ *adalah sebuah graf fuzzy pada* $G^*: (V, E)$. G *dikatakan terhubung jika untuk setiap* $u, v \in V, u \neq v$ *terdapat* $\mu^\infty(u, v) > 0$

Jika dalam graf tegas terdapat graf terhubung seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.4, demikian pula pada graf fuzzy sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.5. Contoh graf fuzzy terhubung dapat dilihat pada Gambar 8(b)

Derajat titik dari sebuah graf tegas adalah jumlah sisi yang terkait pada sebuah titik sebagaimana dijelaskan pada Definisi 2.9, begitu pula Derajat titik dari sebuah graf fuzzy.

Definisi 4.6 (Gani, 2008)
Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ *adalah sebuah graf fuzzy pada* $G^*: (V, E)$. *Derajat dari sebuah titik* $u \in V$ *adalah:*

$$d_G(u) = \sum_{uv \in E} \mu(uv)$$

Derajat minimum dari G adalah $\delta(G) = Min\{d_G(v) | v \in V\}$ *dan derajat maksimum dari G adalah* $\Delta(G) = Max\{d_G(v) | v \in V\}$.

Perhatikan Gambar 8(b), derajat titik dari setiap titik pada graf fuzzy H adalah

$$d_H(u_0) = \mu(u_0u_1) + \mu(u_0u_2) = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

$$d_H(u_1) = \mu(u_1u_0) + \mu(u_1u_2) = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$d_H(u_2) = \mu(u_2u_1) + \mu(u_2u_0) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

$$\Delta(H) = 0.8$$

$$\delta(H) = 0.6$$

Definisi 4.6 dapat dikembangkan menjadi sebuah definisi. Definisi 4.6 dikembangkan dengan melibatkan derajat keanggotaan titik pada derajat titik sebuah titik sehingga menjadi derajat total titik.

Definisi 4.7 (Gani, 2008)
Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada $G^*:(V,E)$. Derajat total (total degree) dari sebuah titik $u \in V$ adalah:

$$td_G(u) = \sigma(u) + \sum_{uv \in E} \mu(uv) = \sigma(u) + d_G(u)$$

Perhatikan Gambar 8(b), derajat total titik dari setiap titik pada graf fuzzy H adalah

$$td_G(u_0) = \sigma(u_0) + d_G(u_0) = 0.5 + 0.8 = 1.3$$

$$td_G(u_1) = \sigma(u_1) + d_G(u_1) = 0.4 + 0.6 = 1.0$$

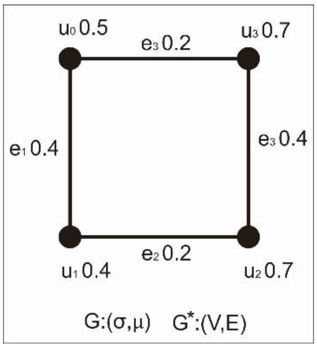
$$td_G(u_2) = \sigma(u_2) + d_G(u_2) = 0.7 + 0.6 = 1.3$$

2. Graf Fuzzy Reguler

Graf tegas reguler didefinisikan sebagai sebuah graf yang setiap titik-titiknya memiliki derajat titik yang sama, melalui analogi seperti graf tegas reguler maka graf fuzzy reguler dapat didefinisikan sebagaimana definisi berikut,

Definisi 4.8 (Gani, 2008)
Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada $G^*:(V,E)$. Jika $d_G(u) = k$ untuk setiap $u \in V$ maka G disebut sebagai graf fuzzy reguler dengan derajat k atau graf fuzzy reguler-k.

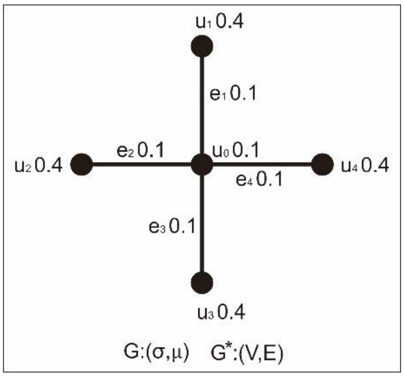
Definisi 4.8 menjelaskan bahwa sebuah graf fuzzy dikatakan reguler jika setiap titik pada graf fuzzy tersebut memiliki derajat titik yang sama. Pada gambar 9 dapat dilihat sebuah graf fuzzy reguler-0.6 G karena $d_G(u) = 0.6, \forall u \in V$.



Gambar 9

Sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.7, sebuah graf fuzzy tidak hanya memiliki derajat titik untuk setiap titiknya, tetapi juga memiliki derajat total titik, sehingga sebagaimana graf fuzzy reguler didefinisikan dari kesamaan derajat titik setiap titiknya maka sebuah graf fuzzy juga dapat didefinisikan sebuah jenis graf berdasarkan kesamaan derajat total titik setiap titiknya.

Definisi 4.9 (Gani, 2008)
Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada $G^*:(V,E)$. Jika $td_G(v)=k$ untuk setiap $v\in V$ maka G disebut sebagai graf fuzzy total reguler dengan derajat k atau graf fuzzy total reguler-k.



Gambar 10

Pada gambar 10 diperhilatkan sebuah graf fuzzy total reguler-0.5 G, karena $td_G(u)=0.5, \forall u\in V$.

Dalam graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler terdapat beberapa teorema antara lain sebagai berikut.

Teorema 4.1
Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada sebuah graf tegas reguler-k $G^*:(V,E)$. Jika $\mu(uv)=c$ untuk setiap $uv \in E$ dan $u,v \in V$ maka G adalah graf fuzzy reguler-kc.

Bukti:

Akan dibuktikan, Jika $\mu(uv)=c$ untuk setiap $uv \in E$ dan $u,v \in V$ maka G adalah graf fuzzy reguler-kc dengan menunjukkan $d_G(u)=kc, \forall u \in V$

Perhatikan bahwa:

G adalah sebuah graf fuzzy pada sebuah graf tegas reguler-k G^*, berdasarkan Definisi 2.8 dan Definisi 2.9 maka setiap titik $u \in V$ terkait dengan k banyaknya sisi, dan diketahui bahwa

$$\mu(uv)=c, \forall uv \in E \ dan \ u,v \in V \tag{4.1}$$

maka derajat titik dari setiap titik $u \in V$ adalah

$$d_G(u)=\sum_{uv\in E}\mu(uv), \forall u \in V$$

Berdasarkan (4.1), maka

$$d_G(u)=\sum_{uv\in E} c, \forall u \in V$$

Karena banyaknya sisi yang terkait pada u adalah sebanyak k, maka

$$d_G(u)=k.c, \forall u \in V$$

Berdasarkan Definisi 4.8, maka

$\therefore G$ adalah graf fuzzy reguler-kc

Jadi, terbukti bahwa G adalah graf fuzzy reguler-kc

Teorema 4.2 (Gani, 2008)
Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada sebuah $G^*: (V, E)$. Jika G adalah reguler dan total reguler maka σ adalah sebuah fungsi konstan.

Bukti:

Akan dibuktikan, jika G adalah reguler dan total reguler maka σ adalah fungsi konstan dengan munjukkan nilai $\sigma(u)$ untuk setiap $u \in V$ adalah sama.

Misalkan G adalah sebuah graf fuzzy reguler-k_1 dan graf fuzzy total reguler-k_2, maka:

$$d_G(u) = k_1, \forall u \in V \tag{4.2}$$

$$td_G(u) = k_2, \forall u \in V \tag{4.3}$$

Perhatikan bahwa:

$td_G(u) = k_2, \forall u \in V$, berdasarkan (4.3)

$d_G(u) + \sigma(u) = k_2, \forall u \in V$, berdasarkan Definisi 4.7

$k_1 + \sigma(u) = k_2, \forall u \in V$, berdasarkan (4.2)

$\sigma(u) = k_2 - k_1, \forall u \in V,$ k_2 dan k_1 adalah bilangan real positif dengan $k_2 = td_G(u) = k_1 + \sigma(u)$ maka $k_2 > k_1$.

$\therefore$ σ adalah sebuah fungsi konstan

Jadi, terbukti bahwa σ adalah fungsi konstan

Teorema 4.3
Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada sebuah $G^*: (V, E)$ dengan σ adalah fungsi konstan. G adalah graf fuzzy reguler jika dan hanya jika G.adalah graf fuzzy total reguler.

Bukti:

Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy pada sebuah $G^*: (V, E)$ dengan

$$\sigma(u) = c, \forall u \in V. \tag{4.4}$$

(⇒)

Akan ditunjukkan: Misalkan G adalah graf fuzzy reguler, G.adalah graf fuzzy total reguler dengan menunjukkan nilai $td_G(u)$ adalah sama untuk setiap $u \in V$

Misalkan G adalah sebuah graf fuzzy reguler-k_1, maka

$d_G(u) = k_1, \forall u \in V$ (4.5)

Perhatikan bahwa:

$td_G(u) = d_G(u) + \sigma(u), \forall u \in V$, berdasarkan Definisi 4.7

$td_G(u) = k_1 + c, \forall u \in V$, berdasarkan (4.4) dan (4.5)

Berdasarkan Definisi 4.9, maka

$\therefore$ G adalah graf fuzzy total reguler

(⇐)

Akan ditunjukkan: Misalkan G adalah sebuah graf fuzzy total reguler. G adalah graf fuzzy reguler dengan menunjukkan nilai $d_G(u)$ sama untuk setiap titik $u \in V$.

Misalkan G adalah sebuah graf fuzzy total reguler-k_2, maka

$td_G(u) = k_2, \forall u \in V.$ (4.6)

Perhatikan bahwa:

$td_G(u) = k_2, \forall u \in V$, berdasarkan (4.6)

$d_G(u) + \sigma(u) = k_2, \forall u \in V$, berdasarkan Definisi 4.7

$d_G(u) = k_2 - \sigma(u), \forall u \in V$

$d_G(u) = k_2 - c, \forall u \in V$, berdasarkan (4.5) dan $k_2 > c$

$\therefore$ G adalah graf fuzzy reguler.

Jadi, terbukti bahwa G adalah graf fuzzy reguler jika dan hanya jika G.adalah graf fuzzy total reguler.

3. Beberapa Sifat Dasar Graf Fuzzy Reguler

Teorema 4.4 (Gani, 2008)
Size dari sebuah graf fuzzy reguler-k $G:(\sigma,\mu)$ *pada* $G^*:(V,E)$ *adalah*

$$S(G)=\frac{pk}{2}, dimana\ p=|V|$$

Bukti:

Akan dibuktikan, jika G adalah graf fuzzy reguler-k maka

$$S(G)=\frac{pk}{2}, dimana\ p=|V|$$

Misalkan $G:(\sigma,\mu)$ adalah sebuah graf fuzzy reguler-k pada $G^*:(V,E)$, $p=|V|$, maka

$$d_G(u)=k, \forall u \in V \tag{4.7}$$

Perhatikan bahwa:

Menurut teorema 2.1 dengan analogi yang sama maka

$$\sum_{u\in V} d_G(u)=2|E|=2\,S(G)$$

Maka,

$$2\,S(G)=\sum_{u\in V} d_G(u)$$

Berdasarkan (4.7), maka

$$2\,S(G)=\sum_{u\in V} k$$

Karena $|V|=p$, maka

$$2\,S(G)=pk$$

$$\therefore S(G)=\frac{pk}{2}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$S(G) = \frac{pk}{2}, dimana\ p = |V|$$

Teorema 4.5 (Gani dan Rada, 2008)
Jika $G: (\sigma, \mu)$ *adalah sebuah graf fuzzy total reguler-r pada* $G^*: (V, E)$, *maka* $2\,S(G) + O(G) = pr, dimana\ p = |V|$.

Bukti:

Akan dibuktikan, Jika $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy total reguler-*r* pada $G^*: (V, E)$ maka,

$$pr = 2\,S(G) + O(G), dimana\ p = |V|$$

Misalkan G adalah sebuah graf fuzzy total reguler-r dengan $p = |V|$ maka

$$r = td_G(u) = d_G(u) + \sigma(u), \forall u \in V \tag{4.8}$$

Perhatikan bahwa:

$r = td_G(u)$, berdasarkan (4.8)

$$\sum_{u \in V} r = \sum_{u \in V} td_G(u)$$

Maka, berdasarkan (4.8)

$$\sum_{u \in V} r = \sum_{u \in V} \big(d_G(u) + \sigma(u)\big)$$

$$\sum_{u \in V} r = \sum_{u \in V} d_G(u) + \sum_{u \in V} \sigma(u)$$

$$pr = \sum_{u \in V} d_G(u) + \sum_{u \in V} \sigma(u)$$

Berdasarkan Teorema 4.4 dan Definisi 4.2 maka

$\therefore pr = 2\,S(G) + O(G)$

Jadi, terbukti bahwa jika G adalah graf fuzzy total reguler-r maka

$$pr = 2\,S(G) + O(G), dimana\ p = |V|$$

Teorema 4.6
Jika $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy reguler-k dan total reguler-r pada $G^*(V, E)$ maka $\sigma(u) = r - k, \forall u \in V$ dan $O(G) = p(r - k)$ dimana $p = |V|$.

Bukti:

Misalkan $G: (\sigma, \mu)$ adalah sebuah graf fuzzy reguler-k dan total reguler-r pada sebuah $G^*: (V, E)$ dengan $p = |V|$ maka

$d_G(u) = k, \forall u \in V$ (4.9)

$td_G(u) = r, \forall u \in V$ (4.10)

Perhatikan Bahwa:

$td_G(u) = r, \forall u \in V$, berdasarkan (4.10)

$d_G(u) + \sigma(u) = r, \forall u \in V$, berdasarkan Definisi 4.7

$k + \sigma(u) = r, \forall u \in V$, berdasarkan (4.9)

$\sigma(u) = r - k, \forall u \in V$σ

$$\sum_{u \in V} \sigma(u) = \sum_{u \in V} (r - k)$$

$O(G) = p(r - k), \forall u \in V$

$\therefore \sigma(u) = r - k, \forall u \in V$ dan $O(G) = p(r - k)$ dimana $p = |V|$

Jadi, terbukti bahwa jika G adalah graf fuzzy reguler-k dan total reguler-r maka $\sigma(u) = r - k, \forall u \in V$ dan $O(G) = p(r - k)$ dimana $p = |V|$

B. Pembahasan

Sebuah graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada $G^*:(V,E)$ adalah sebuah graf yang memiliki himpunan titik dan himpunan sisi yang merupakan himpunan fuzzy dimana sisi-sisi pada graf fuzzy adalah representasi dari relasi fuzzy simetris antara dua titik pada graf fuzzy dengan derajat keanggotaan sisi tidak boleh lebih dari derajat keanggotan terkecil diantara derajat keanggotaan titik-titik akhir dari sisi yang dimaksud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.1.

Order dari sebuah graf fuzzy adalah jumlah dari derajat keanggotaan semua titik pada graf fuzzy yang dimaksud dan Size dari sebuah graf fuzzy adalah jumlah dari derajat keanggotaan semua sisi pada graf fuzzy yang dimaksud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.2.

Sebuah lintasan yeng menghubungkan dua titik pada sebuah graf fuzzy memiliki kekuatan keterhubungan yang diperoleh dari derajat keanggotaan terkecil diantara derajat keanggotaan sisi-sisi yang berada pada lintasan yang dimaksud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.3. Definisi 43 dapat digunakan untuk mengetahui kekuatan keterhubungan antara dua titik pada sebuah graf, yaitu dengan mencari kekuatakn keterhubungan terbesar diantara lintasan-lintasan yang menghubungkan dua titi yang dimaksud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.4.

Sebuah graf fuzzy dikatakan terhubung jika setiap dua titik berbeda pada graf fuzzy yang dimaksud dihubungkan oleh sebuah lintasan dengan kekuatan keterhubungan lebih dari nol, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.5

Derajat titik dari sebuah titik pada sebuah graf fuzzy adalah jumlah derajat keanggotaan dari setiap derajat keanggotaan sisi-sisi yang terkait pada titik yang dimaskud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.6. Derajat total titik dari sebuah titik pada sebuah graf fuzzy adalah jumlah derajat titik dan derajat keanggotaan dari titik yang dimaksud, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.7..

Sebuah graf fuzzy dikatakan reguler-k jika setiap titik pada graf fuzzy yang dimaksud memiliki derajat titik sebesar k dan sebuah graf fuzzy dikatakan total reguler-r jika setiap titik pada graf fuzzy yang dimaksud memiliki derajat total titik sebesar r, sebagaimana dijelaskan pada Definisi 4.8 dan Definisi 4.9. Pada graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler terdapat beberapa teorema yang berlaku sebagaimana yang dijelaskan pada Teorema 4.1, Teorema 4.2 dan Teorema 4.3. Pada graf fuzzy reguler dan graf fuzzy total reguler memiliki beberapa sifat dasar sebagaimana dijelaskan pada Teorema 4.4, Teorema 4.5 dan Teorema 4.6.

BAB V

KESIMPULAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasn pada Bab IV maka dibuatlah beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf fuzzy merupakan perluasan dari graf tegas yaitu himpunan titik dan himpunan sisi pada graf tegas diperluas menjadi himpunan fuzzy yang menyebabkan setiap titik dan setiap sisi pada graf fuzzy memiliki derajat keanggotaan $[0,1]$, dimana derajat keanggotaan dari setiap sisinya tidak boleh lebih dari derajat keanggotaan terkecil diantara titik-titik akhir sisi yang dimaksud. Pada graf fuzzy terdapat beberapa konsep dasar yaitu:
    a. Order dan Size dari suatu graf fuzzy
    b. kekuataan keterhubungan sebuah lintasan pada sebuah graf fuzzy
    c. kekuatan keterhubungan antara dua titik pada sebuah graf fuzzy
    d. graf fuzzy terhubung
    e. derajat titik dan derajat total titik
    f. graf fuzzy reguler
    g. graf fuzzy total reguler
2. Terdapat beberapa sifat dasar pada graf fuzzy reguler dan total reguler, yaitu:
    a. $S(G) = \frac{pk}{2}$, dimana $p = |V|$ dan G adalah graf fuzzy reguler-k
    b. $pr = 2\,S(G) + O(G)$, dimana $p = |V|$ dan G adalah graf fuzzy reguler-r

c. $\sigma(u) = r - k, \forall u \in V$ dan $O(G) = p(r - k)$ dimana $p = |V|$ dan G adalah graf fuzzy reguler-k dan total reguler-r

B. Saran

Dapat dibuat sebuah penelitian yang meneliti kekuatan keterhubungan dari sebuah graf fuzzy khusus.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M. (2008), *Dasar-Dasar Teori Himpunan Fuzzy Dan Logika Fuzzy*, Badan Penerbit UNM: Makassar.

Balakrishnan, R. & Ranganathan, K. (2012), *A Text Book of Graph Theory (2nd ed)*, Springer Science+Business Media New York: New York, USA.

Bell, E. T. (1951), *Mathematics Queen and Servant of Science*, MacGraw-Hill Company, Inc.: United States of America.

Budayasa, I K. (2007), *TEORI GRAPH DAN APLIKASINYA*, Unesa University Press: Surabaya.

Gani, A.N. & Radha, K. (2008), On Regular Fuzzy Graphs, *Journal of Physical Scienses*, 12, 33-40.

Lee, K. H. (2005), *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer-Verlag Heidelberg: Germany

Lipschutz, R. & Lipson, M. (2007), *Schaum's Outlines: DISCRETE MATHEMATICS (3rd ed)*, McGraw-Hill Companies, Inc.: United States of America.

Lupczonok, P. (1990), Fuzzy Vector Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 38, 329-343.

Mathew, S. & Sunitha, M. S. (2013), Cylce connectivity in fuzzy graphs, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 24, 549-554

Mordeson, J. N. & Nair, P.S. (2000), *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*, Physica-Verlag Heidelberg: Germany.

Munir, R. (2010), *Matematika Diskrit*, revisi empat, Informatika Bandung: Bandung.

Ralescu, D. & Adams, G. (1980), The Fuzzy Integral, *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, 75, 562-570.

Rosenfeld, A. (1971), Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analyze and Aplication*, 35, 512-517.

Tahmir, S. (2004), *Teori Grup*, Andira Publisher: Makassar.

Thulasiraman, K. dkk. (2016), *Handbook of Graph Theory, Combinatorial, Optimization, and Algorithms*,CRC Press: New York, USA.

West, D. B. (2001), *Introduction to Graph Theory (2nd ed)*, Rashtriya Printers: India.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR (UNM)
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Alamat : Kampus UNM Parangtambung, Jalan Daeng Tata Makassar
Telepon : 0411- 864936 Fax.0411-880568
Laman : http://mipa.unm.ac.id

Nomor : 3427/UN36.1/KM/2016 Makassar, 30 September 2016
Lamp : _ _ _ _ _
Hal : Pembimbing/Konsultan Skripsi Mahasiswa

Yth : Bapak/Ibu

9. Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si.
10. Dr. Syafruddin Side, S.Si., M.Si.

Di
Makassar

Dengan hormat, sehubungan dengan surat Ketua Jurusan Matematika tanggal 17 September 2016 tentang hal tersebut di atas, maka kami menetapkan Bapak/Ibu Sebagai pembimbing/konsultan penulisan Skripsi Mahasiswa sesuai dengan nomor urut dibawah.

Nama : Muh. Raid Salman T.
Stambuk : 1311141013
Jurusan : Matematika
Judul : **Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy.**

Untuk itu kami harapkan kesediaannya memberi petunjuk/bimbingan sampai dengan penyelesaian skripsinya.

Atas Perhatian dan kesediaannya kami Ucapkan Terimakasih.

Dekan,

Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.
NIP. 19620417 198803 1 001

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR (UNM)
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Kantor: Kampus Universitas Negeri Makassar Parangtambung Jl. Dg. Tata, Telp. (0411) 883537

Nomor : 553 /UN36.1.MAT/PP/2016
Lamp. : 1 exp proposal
Hal : ***Undangan Seminar Proposal***

Kepada

Yth. Bapak/Ibu Dosen Pembimbing dan Penguji Seminar Proposal

1. *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Pembimbing I)
2. *Syafruddin Side, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Pembimbing II)
3. *Prof. Dr. H. Nurdin, M.Pd.* (Penguji I)
4. *Dr. Awi, M.Si.* (Penguji II)
5. *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Moderator)

di
Makassar

Assalamu Alaikum Wr. Wb.

Dengan petunjuk Allah SWT., kami mengundang Bapak/Ibu untuk menghadiri seminar proposal dari mahasiswa:

Nama : Muh. Raid Salman T.
N I M : 1311141013

yang insya Allah dilaksanakan pada:

Hari, tanggal : Jumat, 04 Nopember 2016
J a m : 10.00 - Selesai
Tempat : Ruang 419 Gedung ICP Lt 4

Kehadiran Bapak/Ibu sangat diharapkan tepat pada waktunya dan tanpa kehadirannya, seminar proposal mahasiswa yang bersangkutan akan ditunda. Demikian undangan kami dan semoga Allah SWT merahmati kita semua.

Wassalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, 31 Oktober 2016
an. Ketua Jurusan,
Sekretaris

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Awi, M.Si.
NIP. 19661110 199103 1 005

Catatan:
** Dosen Pembimbing dan Penguji sangat diharapkan kehadirannya.*

Format: H1

LEMBAR PERSETUJUAN SEMINAR HASIL

Judul Skripsi: Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy

Nama	: Muh. Raid Salman T.
NIM	: 1311141013
Program Studi	: Matematika

Setelah melakukan pembimbingan dan mahasiswa tersebut telah memperbaiki draf hasil penelitiannya, maka kami menyatakan bahwa hasil penelitian ini dapat diseminarkan.

Menyetujui:

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si.	**Dr. Syafruddin Side, S.Si., M.Si.**
NIP. 19690129 199403 1 001	**NIP. 19720202 199702 1 002**

Mengetahui:

Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNM	Ketua Program Studi Matematika
Dr. Awi, M.Si.	**Dr. Hj. Wahidah Sanusi, S.Si., M.Si.**
NIP. 19661110 199103 1 005	**NIP. 19700409 199702 2 001**

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR (UNM)
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Kantor: Kampus Universitas Negeri Makassar Parangtambung Jl. Dg. Tata, Telp. (0411) 883537

Nomor : /UN36.1.MAT/PP/2017
Lamp. : 1 exp laporan hasil
Hal : ***Undangan Seminar Hasil***

Kepada

Yth. Bapak/Ibu Dosen Pembimbing dan Penguji Seminar Hasil

1. *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Pembimbing I)
2. *Syafruddin Side, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Pembimbing II)
3. *Prof. Dr. H. Nurdin, M.Pd.* (Penguji I)
4. *Dr. Awi, M.Si.* (Penguji II)
5. *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.* (Moderator)

di
Makassar

Assalamu Alaikum Wr. Wb.

Dengan petunjuk Allah SWT., kami mengundang Bapak/Ibu untuk menghadiri seminar hasil dari mahasiswa:

Nama : Muh. Raid Salman T.
N I M : 1311141013

yang insya Allah dilaksanakan pada:

Hari, tanggal : Jumat, 24 Maret 2017
J a m : 13.30 - Selesai
Tempat : Ruang 417 Gedung ICP Lt 4

Kehadiran Bapak/Ibu sangat diharapkan tepat pada waktunya dan tanpa kehadirannya, seminar hasil mahasiswa yang bersangkutan akan ditunda. Demikian undangan kami dan semoga Allah SWT merahmati kita semua.

Wassalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, 21 Maret 2017
Ketua Jurusan,

Sutamrin, S.Si, M.Pd
19820905 200801 1 007

Catatan:
* *Dosen Pembimbing dan Penguji sangat diharapkan kehadirannya.*

Format: S1

LEMBAR PERSETUJUAN UJIAN SKRIPSI

Judul skripsi: Konsep dan Sifat Dasar Graf Fuzzy

Nama	: Muh. Raid Salman T.
NIM	: 1311141013
Program Studi	: Matematika

Setelah melakukan pembimbingan dan mahasiswa tersebut telah memperbaiki draf skripsinya, maka kami menyatakan bahwa draf skripsi ini dapat diujiankan.

Menyetujui:

Pembimbing I

Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si.
NIP. 19690129 199403 1 001

Pembimbing II

Dr. Syafruddin Side, S.Si., M.Si.
NIP. 19720202 199702 1 002

Mengetahui:

Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNM

Dr. Awi, M.Si.
NIP. 19661110 199103 1 005

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Hj. Wahidah Sanusi, S.Si., M.Si.
NIP. 19700409 199702 2 001

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR (UNM)
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Alamat: Kampus UNM Parangtambung, Jl. Daeng Tata Makassar
Telepon : 0411-864936 Fax. 0411-880568
Laman : http://mipa.unm.ac.id

Makassar, 24 Maret 2017

Nomor : 844 /UN36.1/PP/2017
Lamp. : 1 (satu) Naskah Skripsi
Hal : ***Undangan Ujian Skripsi***

Kepada

Yth. Bapak/Ibu Dosen Tim Penguji Skripsi

1. Ketua Ujian : *Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.*
2. Sekretaris : *Dr. Awi, M.Si.*
3. Pembimbing I : *Muhammad Abdy, S.Si., M.Si, Ph.D.*
4. Pembimbing II : *Syafruddin Side, S.Si., M.Si, Ph.D.*
5. Penguji I : *Prof. Dr. H. Nurdin, M.Pd.*
6. Penguji II : *Dr. Awi, M.Si.*

di
Makassar

Assalamu Alaikum Wr. Wb.

Dengan petunjuk Allah SWT., kami mengundang Bapak/Ibu menghadiri dan menguji

Nama : Muh. Raid Salman T.
N I M : 1311141013

yang insya Allah dilaksanakan pada:

Hari, tanggal : Rabu, 29 Maret 2017
J a m : 10.00 - Selesai
Tempat : Rg. Seminar Lt.4 Gedung ICP

Kehadiran Bapak/Ibu sangat diharapkan tepat pada waktunya dan tanpa kehadirannya, ujian skripsi yang bersangkutan akan ditunda.
Demikian undangan kami dan semoga Allah SWT merahmati kita semua.

Wassalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Dekan,

Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.
NIP.: 19620417 198803 1 001

Catatan:
Diharapkan datang paling lambat 5 menit sebelum ujian dimulai

RIWAYAT HIDUP

Muh Raid Salman T., Lahir di Ujung Pandang, pada tanggal 22 Juli 1995 sebagai anak pertama dari enam bersaudara buah hati dari pasangan Edi Ibnu Tufail dan Rosmiati. Penulis memulai jenjang pendidikan di SDN Mangkura III pada tahun 2001 dan tamat tahun 2007, penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Islam Terpadu Wahdah Islamiyah dan tamat tahun 2010. Kemudian masuk SMA Negeri 12 Makassar pada tahun 2010 dan tamat tahun 2013. Penulis melanjutkan studi ke jenjang perguruan tinggi pada tahun 2013 di Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar melalui jalur SBMPTN. Selama kuliah penulis tercatat sebagai Asisten Jurusan Unit Program Studi Matematika tahun 2014 sampai tahun 2017.