Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 32 – 40)
Vol. 3. No. 1, April 2020
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Spectrum Matriks Detour dari Graf Roda dengan $n+1$ Titik W_n

Muhammad Abdy[1, a)], Rahmat Syam[1, b)], dan Agnes Monica Putri[1, c)]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*
Universitas Negeri Makassar

[a)] muh.abdy@unm.ac.id
[b)] rahmat.syam@unm.ac.id
[c)]agnesputrischn@gmail.com

***Abstrak**. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan spectrum matriks detour dari graf roda dengan n+1 titik W_n. Spectrum dalam teori graf merupakan suatu topik menarik untuk dikaji dengan mempertemukan teori graf dan aljabar linear. Bentuk spectrum matriks detour adalah salah satu spectrum yang dapat ditentukan dalam graf roda. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang terdiri dari nilai eigen berbeda dan banyak basis ruang eigen dari matriks terhubung langsung graf roda merupakan spectrum dari graf roda. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa langkah-langkah dalam menentukan spectrum matriks detour dari graf roda n+1 titik W_n, yaitu: menentukan graf roda dengan n + 1 titik W_n; menentukan detour, nilai eigen dan vektor eigen dari graf roda dengan n + 1 titik W_n,; melihat spectrum dan pola spectrum matriks detour dari graf roda n+1 titik W_n; pola yang didapat berupa dugaan kemudian dibuktikan dengan merumuskan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.*
***Kata Kunci:** Spectrum, Matriks Detour, Graf Roda*

***Abstract.** This study aims to determine the spectrum of detour matrix from the wheel graph with n+1 point W_n. Spectrum in graph theory is an interesting topic to review by bringing together graph theory and linear algebra. The form of the spectrum of detour matrix is one of the spectrums that can be determined in the wheel graph. The order matrix $(2 \times n)$ which consists of different eigenvalues and many the eigen space base from matrix adjacent wheel graph is the spectrum of wheel graph. The results of this study show that steps in determining spectrum of detour matrix from the wheel graph with n+1 point W_n, that is: determine the wheel graph with n+1 point W_n; determine the detour; eigenvalues and eigenvectors of the wheel graph with n+1 point W_n; see the spectrum and patterns spectrum of detour matrix from the wheel graph with n+1 point W_n; pattern obtained in the form of conjecture then proved by formulating a theorem equipped with proof.*
***Keywords:** Spectrum, Detour Matrix, Wheel Graph.*

LATAR BELAKANG

Suatu pokok bahasan dalam teori graf yakni graf roda. Graf roda merupakan graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel dengan graf komplit (Fajariyah,2009). Teori graf banyak didukung oleh berbagai cabang ilmu matematika lain salah satunya bidang aljabar. Kedua cabang ilmu tersebut, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu representasi graf dalam suatu matriks. Teori *spektrum* graf merupakan penghubung yang mempertemukan teori graf dan aljabar linear. Lebih spesifiknya, teori *spektrum* graf membahas sifat-sifat graf yang berhubungan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen. Dengan menggunakan teori graf dapat diketahui lintasan terpanjang dari suatu titik ke titik lainnya. Misalkan *G* adalah graf terhubung, dan lintasan terjauh dari suatu titik ke titik yang lain pada *G* dituliskan dalam bentuk matriks, maka matriks tersebut merupakan matriks detour dari *G*. Jika matriks tersebut dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linear, maka akan menghasilkan konsep *spectrum* (Nafisah, 2014). Penelitian terkait teori graf telah dilakukan beberapa peneliti, diantaranya Susanti Fajariyah (2009) meneliti tentang graf dual (*dual graph)* dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (cH_n), tulisan ini mengkaji mengenai graf roda. Lailatul Khusnah (2011) meneliti tentang *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik *Kn*, penelitian tersebut hanya memfokuskan *spectrum* matriks detour pada graf komplit sehingga hal ini membuka peluang untuk mengkaji *spectrum* matriks detour pada suatu graf lain yang belum dikaji. Adapun dalam penelitian ini membahas lebih lanjut mengenai *spectrum* matriks detour dari suatu graf yakni graf roda.

Langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut; 1) Mempelajari teori-teori *spectrum* matriks detour dari graf; 2) Menggambarkan lima graf roda dengan *n*+1 titik W_n; 3) Menentukan matriks detour dari graf roda dengan $n + 1$ titik W_n; 4) Mencari nilai eigen, vektor eigen dan *spectrum* kelima matriks detour dari graf roda; 5) Melihat pola *spectrum* matriks detour dengan $n + 1$ titik W_n yang masih berupa dugaan; 6) Pola dugaan yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan suatu teorema yang juga masih berbentuk dugaan yang dilengkapi dengan bukti.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Spectrum dari Suatu Graf

Terdapat suatu graf G, dari suatu graf tersebut dibentuk matriks adjacency. Matriks adjacency dapat dirubah menjadi matriks detour, yang unsur-unsur ke-(*i*,*j*) merupakan panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Setelah dibentuk menjadi matriks detour, maka dapat dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut. Misalkan G graf berorder *p* dan *A* matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol *x* disebut vektor eigen dari *A* jika *Ax* adalah suatu kelipatan skalar dari *x*, yakni $Ax = \lambda x$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari *A*, dan *x* disebut sebagai vektor eigen dari *A* yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai eigen dari matriks *A*, persamaan $Ax = \lambda Ix$ ditulis kembali pada persamaan (1).

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (1)$$

dari (1) *I* merupakan matriks identitas berordo (1×*p*). Persamaan ini akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $det(\lambda I - A) = 0$ yang kemudian menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks *A*. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai eigen dari matriks *A* (Abdussakir, dkk., 2009). Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari *A*, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ dan misalkan $m\lambda_1, m\lambda_2, \ldots, m\lambda_n$ adalah banyaknya basis untuk ruang eigen, maka matriks berordo (2 × n) yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m\lambda_1, m\lambda_2, \ldots, m\lambda_n$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf *G* dan dinotasikan dengan *spec*(*G*). Jadi *spectrum* graf *G* dapat ditulis dengan

$$spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ m\lambda_1 & m\lambda_2 & \cdots & m\lambda_n \end{bmatrix}$$

Graf dalam Matriks Detour

Definisi 1 (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

Matriks detour didefinisikan DD = DD(G) dari G sehingga unsur atau entry (i,j) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j.

Nilai eigen dari *DD*(*G*) disebut *DD*-nilai eigen dari *G* dan membentuk *DD-spectrum* dari *G,* yang dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, *i* = 1,2, … , *n* adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i1} \geq \mu_{i2} \geq \cdots \geq \mu_{ig}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka *DD-spectrum* dapat ditulis sebagai :

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i1} & \mu_{i2} & \cdots & \mu_{ig} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix}$$

dimana m_j menunjukan banyaknya basis untuk ruang eigen dalam μ_{ij}.

Pembahasan *spectrum* matriks detour dari graf roda dengan *n + 1* titik W_n dibatasi untuk $n \geq 3$ dan *n* bilangan asli.

1. ***Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_3**
   $spec_{DD}(W_3) = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
2. ***Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_4**
   $spec_{DD}(W_4) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
3. ***Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_5**
   $spec_{DD}(W_5) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
4. ***Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_6**
   $spec_{DD}(W_6) = \begin{bmatrix} 36 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
5. ***Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_7**
   $spec_{DD}(W_7) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$
6. **Pola *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Roda W_n**

Berdasarkan pembahasan *spectrum* matriks detour dari graf roda W_3, W_4, W_5, W_6, W_7 dihasilkan tabel 1.

TABEL 1. *Spectrum* Matriks Detour Graf Roda W_n

No	Graf Roda (W_n)	$spec_{DD}(W_n)$
1	W_3	$spec_{DD}(W_3) = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
2	W_4	$spec_{DD}(W_4) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
3	W_5	$spec_{DD}(W_5) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
4	W_6	$spec_{DD}(W_6) = \begin{bmatrix} 36 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
5	W_7	$spec_{DD}(W_7) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

Diperoleh pada Tabel 1 bahwa bentuk umum dari *spectrum* matriks detour dari graf roda W_n adalah

$$spec_{DD}(W_n) = \begin{bmatrix} n^2 & -n \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

dengan $n \geq 3$ dan *n* adalah bilangan asli.

Teorema 1

Jika W_n adalah graf roda dengan n+1 titik, maka

$$spec_{DD}(W_n) = \begin{bmatrix} n^2 & -n \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

dimana $spec_{DD}(W_n)$ adalah spectrum matriks detour dari graf roda dengan n ≥ 3 dan n bilangan asli.

Bukti

Misalkan $DD(W_n)$ adalah matriks detour adjacent dari W_n, maka

$$DD(W_n) = \begin{bmatrix} 0 & n & n & \cdots & n \\ n & 0 & n & \cdots & n \\ n & n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$= n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$= n \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \right)$$

$DD(W_n) = n\,(J\,(n+1) - I\,(n+1))$ dimana J adalah matriks yang semua elemennya 1, dan I adalah matriks identitas.

Persamaan karakteristik matriks detour dari graf roda W_n diperoleh dengan cara :

$$\det(\lambda I - DD(W_n)) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & n & n & \cdots & n \\ n & 0 & n & \cdots & n \\ n & n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & n & n & \cdots & n \\ n & 0 & n & \cdots & n \\ n & n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -n & -n & \cdots & -n \\ -n & \lambda & -n & \cdots & -n \\ -n & -n & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n \\ -n & -n & \cdots & -n & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks det $(I\lambda - DD\,(W_n))$ direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh :

$$\begin{bmatrix} \lambda & -n & -n & -n & -n & \cdots & -n \\ 0 & -\frac{n^2-\lambda^2}{\lambda} & -\frac{n(n+\lambda)}{\lambda} & -\frac{n(n+\lambda)}{\lambda} & -\frac{n(n+\lambda)}{\lambda} & \cdots & -\frac{n(n+\lambda)}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{2n^2+n\lambda-\lambda^2}{n-\lambda} & \frac{n(n+\lambda)}{n-\lambda} & \frac{n(n+\lambda)}{n-\lambda} & \cdots & \frac{n(n+\lambda)}{n-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3n^2+2n\lambda-\lambda^2}{2n-\lambda} & \frac{n(n+\lambda)}{2n-\lambda} & \cdots & \frac{n(n+\lambda)}{2n-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda} & \ddots & \frac{n(n+\lambda)}{3n-\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda} \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - DD(W_n))$ merupakan hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi,

$\lambda\left(-\frac{n^2-\lambda^2}{\lambda}\right)A$, dimana $A = \left(\frac{2n^2+n\lambda-\lambda^2}{n-\lambda}\right)\left(\frac{3n^2+2n\lambda-\lambda^2}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n^2-\lambda^2)A$

$= -((n-\lambda)(n+\lambda))\left(\frac{2n^2+n\lambda-\lambda^2}{n-\lambda}\right)\left(\frac{3n^2+2n\lambda-\lambda^2}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(2n^2+n\lambda-\lambda^2)B,$ dimana $B = \left(\frac{3n^2+2n\lambda-\lambda^2}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(2n-\lambda)(n+\lambda)B$

$= -(n+\lambda)(2n-\lambda)(n+\lambda)\left(\frac{3n^2+2n\lambda-\lambda^2}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(3n^2+2n\lambda-\lambda^2)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(3n-\lambda)(n+\lambda)C,$ dimana $C = \left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)ns-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(3n-\lambda)(n+\lambda)\left(\frac{4n^2+3n\lambda-\lambda^2}{3n-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)(4n^2+3n\lambda-\lambda^2)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)(4n-\lambda)(n+\lambda)\cdots\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)\cdots((n-1)n-\lambda)(n+\lambda))\left(\frac{(n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2}{(n-1)n-\lambda}\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)\cdots(n+\lambda)\left((n)n^2+(n-1)n\lambda-\lambda^2\right)$

$= -(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)(n+\lambda)\cdots(n+\lambda)\left((n)n-\lambda)(n+\lambda)\right)$

$= -((n)n-\lambda))\,(n+\lambda)^n$

diperoleh persamaan karakteristiknya adalah
$\det(\lambda I - DD(W_n)) = -((n)n-\lambda))\,(n+\lambda)^n$

sehingga nilai eigen yang diperoleh adalah
$-((n)n-\lambda)) = 0$
$-(n)n+\lambda = 0$
$\lambda = (n)n$
$\lambda = n^2$
atau
$(n+\lambda)^n = 0$
$(n+\lambda) = 0$
$\lambda = -n$
maka diperoleh $\lambda_1 = n^2$ dan $\lambda_2 = -n$.

Kemudian dibuktikan bahwa diperoleh banyaknya basis untuk ruang eigen $\lambda_1 = n^2$ adalah 1. Solusi nontrivial dari $(n^2I - DD(W_n))x = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} n^2 & -n & -n & -n & -n & \cdots & -n \\ 0 & -\frac{n^2-n^4}{n^2} & -\frac{n(n+n^2)}{n^2} & -\frac{n(n+n^2)}{n^2} & -\frac{n(n+n^2)}{n^2} & \cdots & -\frac{n(n+n^2)}{n^2} \\ 0 & 0 & \frac{2n^2+nn^2-n^2}{n-n^2} & \frac{n(n+n^2)}{n-n^2} & \frac{n(n+n^2)}{n-n^2} & \cdots & \frac{n(n+n^2)}{n-n^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3n^2+2nn^2-n^2}{2n-n^2} & \frac{n(n+n^2)}{2n-n^2} & \cdots & \frac{n(n+n^2)}{2n-n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4n^2+3nn^2-n^2}{3n-n^2} & \ddots & \frac{n(n+n^2)}{3n-n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(n)n^2+(n-1)nn^2-n^2}{(n-1)n-n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n^2 & -n & -n & -n & -n & \cdots & -n \\ 0 & -(1-n^2) & -(1+n) & -(1+n) & -(1+n) & \cdots & -(1+n) \\ 0 & 0 & \frac{n^2+n}{1-n} & \frac{n+n^2}{1-n} & \frac{n+n^2}{1-n} & \cdots & \frac{n+n^2}{1-n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n^2+2n}{2-n} & \frac{n+n^2}{2-n} & \cdots & \frac{n+n^2}{2-n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3n^2+3n}{3-n} & \ddots & \frac{n+n^2}{3-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n^3-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n^2x_1 - nx_2 - nx_3 - nx_4 - nx_5 + \cdots - nx_{n+1} = 0$$

$$-(1-n^2)x_2 - (1+n)x_3 - (1+n)x_4 - (1+n)x_5 + \cdots - (1+n)x_{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{n^2+n}{1-n}\right)x_3 + \left(\frac{n+n^2}{1-n}\right)x_4 + \left(\frac{n+n^2}{1-n}\right)x_5 + \cdots + \left(\frac{n+n^2}{1-n}\right)x_{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{2n^2+2n}{2-n}\right)x_4 + \left(\frac{n+n^2}{2-n}\right)x_5 + \cdots + \left(\frac{n+n^2}{2-n}\right)x_{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{3n^2+3n}{3-n}\right)x_5 + \cdots + \left(\frac{n+n^2}{3-n}\right)x_{n+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$-(n^3-n)x_{n+1} = 0$$

maka, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_{n+1}$
misal $x_1 = s$ maka $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_{n+1} = s$
sehingga vektor eigennya adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

karena

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linear, vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = n^2$. Maka, banyak basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = n^2$ adalah 1.

Kemudian dibuktikan bahwa diperoleh banyaknya basis untuk ruang eigen $\lambda_2 = -n$ adalah n. Solusi nontrivial dari $((-n)I - DD(W_n))x = 0$ adalah

$$
\begin{bmatrix}
-n & -n & -n & -n & -n & \cdots & -n \\
0 & -\dfrac{n^2-(-n)^2}{-n} & -\dfrac{n(n+(-n))}{-n} & -\dfrac{n(n+(-n))}{-n} & -\dfrac{n(n+(-n))}{-n} & \cdots & -\dfrac{n(n+(-n))}{-n} \\
0 & 0 & \dfrac{2n^2+n(-n)-n^2}{n-(-n)} & \dfrac{n(n+(-n))}{n-(-n)} & \dfrac{n(n+(-n))}{n-(-n)} & \cdots & \dfrac{n(n+(-n))}{n-(-n)} \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{3n^2+2n(-n)-(-n)^2}{2n-(-n)} & \dfrac{n(n+(-n))}{2n-(-n)} & \cdots & \dfrac{n(n+(-n))}{2n-(-n)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{4n^2+3n(-n)-(-n)^2}{3n-(-n)} & \ddots & \dfrac{n(n+(-n))}{3n-(-n)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{(n)n^2+(n-1)n(-n)-(-n)^2}{(n-1)n-(-n)}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-n & -n & -n & -n & -n & \cdots & -n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
-nx_1 - nx_2 - nx_3 - nx_4 - nx_5 + \cdots - nx_{n+1} &= 0 \\
-n(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{n+1}) &= 0 \\
\frac{-n(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{n+1})}{-n} &= \frac{0}{-n} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{n+1} &= 0 \\
x_1 &= -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \cdots - x_{n+1}
\end{aligned}
$$

sehingga vektor eigennya adalah

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \cdots - x_{n+1} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}
$$

$$
= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ \cdots + x_{n+1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

karena

$$
\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},
\ldots,
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

bebas linear, vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -n$. Maka, banyak basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -n$ adalah n. Sehingga berdasarkan pembahasan diatas, dapat dijelaskan untuk $\lambda_1 = n^2$ terdapat 1 basis untuk ruang eigen dan untuk $\lambda_2 = -n$ terdapat n basis untuk ruang eigen. Terbukti bahwa Jika W_n adalah graf roda dengan $n+1$ titik, maka

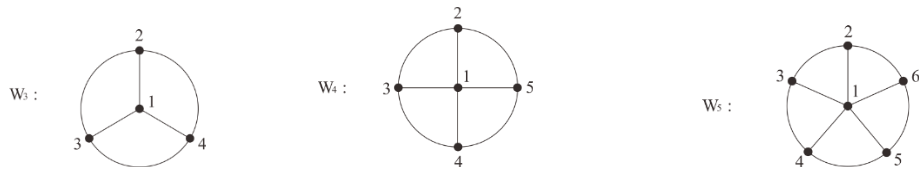
$$
spec_{DD}(W_n) = \begin{bmatrix} n^2 & -n \\ 1 & n \end{bmatrix}
$$

dimana $spec_{DD}(W_n)$ adalah *spectrum* matriks detour dari graf roda dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah di uraikan, diperoleh kesimpulan langkah-langkah menentukan *spectrum* matriks detour graf roda dengan n + 1 titik (W_n) adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan graf roda dengan n + 1 titik W_n



2. Menentukan matriks detour dari graf roda dengan n + 1 titik W_n

$$DD(W_n)=\begin{bmatrix} 0 & n & n & \cdots & n \\ n & 0 & n & \cdots & n \\ n & n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n & 0 \end{bmatrix}$$

3. Mencari nilai eigen , vektor eigen dan *spectrum* dari matriks detour dari graf roda dengan n + 1 titik W_n :

   i. Nilai eigen $DD(W_3)$ adalah $\lambda_1 = 9$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -3$ dengan basis 3.
   ii. Nilai eigen $DD(W_4)$ adalah adalah $\lambda_1 = 16$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -4$ dengan basis 4.
   iii. Nilai eigen $DD(W_5)$ adalah adalah $\lambda_1 = 25$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -5$ dengan basis 5.
   iv. Nilai eigen $DD(W_6)$ adalah adalah $\lambda_1 = 36$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -6$ dengan basis 6.
   v. Nilai eigen $DD(W_7)$ adalah adalah $\lambda_1 = 49$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -7$ dengan basis 7.
   vi. Nilai eigen $DD(W_n)$ adalah adalah $\lambda_1 = n^2$ dengan basis 1, dan adalah $\lambda_2 = -n$ dengan basis n.

4. Melihat pola *spectrum* matriks detour dari graf roda dengan n + 1 titik W_n.

   i. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_3)
   $Spec_{DD}(W_3) = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
   ii. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_4)
   $Spec_{DD}(W_4) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
   iii. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_5)
   $Spec_{DD}(W_5) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
   iv. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_6)
   $Spec_{DD}(W_6) = \begin{bmatrix} 36 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
   v. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_7)
   $Spec_{DD}(W_7) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$
   vi. *Spectrum* matriks detour graf roda (W_n)
   $Spec_{DD}(W_n) = \begin{bmatrix} n^2 & -n \\ 1 & n \end{bmatrix}$

Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian tentang *spectrum* matriks detour dari suatu graf yang belum dikaji sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F.F. (2009). *Teori Graf* : *Topik Dasar Untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN Malang Press.

Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S. (2010). On Detour Spectra of Some Graphs.*World Academy of science, Engineering and Technologhy International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering,* 4(2).

Fajariyah, S. (2009). Graf Dual (*Dual Graph*) Dari Graf Roda (W_n) Dan Graf Helm Tertutup (cH_n). *Skripsi*. Malang: Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Khusna, L. (2011). *Spectrum* Matriks Detour Dari Graf Komplit Dengan n titik Kn. *Skripsi.* Malang: Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nafisah, M. (2014). *Spectrum* Detour Graf *Non-Commuting* Dari Grup Dihedral. *Skripsi.* Malang: Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.