Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 11 – 19)
Vol. 3. No. 1, April 2020
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Model SEIRS Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar

Rahmat Syam[1, a)], Syafruddin Side[1, b)], dan Citra Suci Said[1, c)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Unversitas Negeri Makassar*

[a)] rahmat.syam@unm.ac.id
[b)]syafruddin@unm.ac.id
[c)]sucisaidcitra@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini bertujuan untuk membangun model penyebaran penyakit tuberkulosis tipe SEIRS (Susceptible- Exposed- Infected- Recovered- Susceptible) dengan menambahkan asumsi bahwa manusia yang pulih dapat rentan kembali terkena tuberkulosis. Model ini dibagi menjadi empat kelas yaitu, rentan, terinfeksi tapi belum aktif, terinfeksi, dan sembuh. Data yang digunakan adalah data jumlah penderita penyakit tuberkulosis dari Dinas Kesehatan Kota Makassar tahun 2017. Model matematika tipe SEIRS digunakan untuk menentukan titik equilibrium. Berdasarkan hasil simulasi model SEIRS diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) sebesar 0,312 berarti bahwa seseorang yang terinfeksi penyakit tuberkulosis tidak menyebabkan orang lain terkena penyakit tuberkulosis di wilayah Kota Makassar.*
Kata Kunci: *Titik Equilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar, Tuberkulosis, Model SEIRS, Pemodelan.*

Abstract. *This research aims to model of tuberculosis type SEIRS (Susceptible-Exposed-Infected-Recovery-Susceptible) by adding assumption that human that has been recovered can be suspected again by Tuberculosis. This model can be divided to four classes, those are suspected, exposed, infected, and recovered. The data that used is data on the number of tuberculosis sufferer from Health Department in Makassar City 2017. Mathematicsl model of SEIRS type is used to determine the equilibrium point. According to the simulation results of SEIRS model, obtained the base reproduction number (R_0) is 0.312 means that people who infected by tuberculosis does not causes other people get tuberculosis in Makassat city.*
Keywords: *Equilibrium Point, Basic Reproduction Numbers, Tuberculosis, SEIRS Model, modeling.*

PENDAHULUAN

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Adapun contohnya yaitu aplikasi untuk mengetahui model penyebaran penyakit menular pada suatu daerah atau wilayah tertentu. Untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, dikenal beberapa model penyebaran penyakit, baik model yang bersifat deterministik maupun model yang bersifat stokastik. Model-model tersebut antara lain SI, SIS, SIR, SEIR dan SEIRS. Model-model tersebut memiliki karakteristik tersendiri, berdasarkan jenis dan bentuk penyebaran penyakit menular yang diamati, misalnya model SEIRS pada penyebaran penyakit tuberkulosis (Hasrina, 2015).

Tuberkulosis (TBC atau TB) adalah penyakit infeksi pada saluran pernafasan yang disebabkan oleh bakteri *mycobacterium tuberculosis*, sebagian besar TB menyerang paru-paru tetapi dapat juga mengenai organ tubuh lain. (Rafflesia, 2014). Menurut data WHO (2016) pada tahun 2015 diperkirakan terdapat 10,4 juta kasus baru tuberkulosis atau 142 kasus/100.000 populasi, dengan 480.000 kasus *multidrug-resistant*.

Model matematika untuk kasus penyakit epidemik memang tidak dapat menggambarkan secara akurat semua aspek epidemik realnya, namun dengan adanya pemodelan matematika dapat memberikan harapan yang baik untuk membandingkan strategi-strategi yang dapat dilakukan untuk memperkecil laju infeksinya. Meskipun model matematikanya tidak mampu dalam memprediksi dan mengendalikan penyakit epidemic dimasa mendatang (Marfianti, 2015).

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang model penyebaran penyakit tuberkulosis (Side, 2015; Awaliya, 2016; Fadilah & Zulakmal, 2016; Sanusi, Alimuddin, & Islam, 2018; Side, Sukarna, & Asfarina, 2018). Side (2015) mengembangkan model matematika SIR pada penyebaran penyakit tuberklosis dengan memperhatikan faktor transmigrasi. Awaliya (2016) mengembangkan model matematika SEIR dengan memperhatikan faktor pengobatan. Fadilah & Zulakmal (2016) membahas pembentukan dan analisis model matematika terhadap penularan penyakit tuberkulosis yang berfokus kepada kasus deteksi dan pengobatan.

Penelitian ini membuat modifikasi model dari penelitian sebelumnya. Model ini dikembangkan dari model SIR yang diteliti Side (2015) dan model SEIR yang diteliti Awaliya (2016). Tujuan penelitian ini untuk membangun model matematika SEIRS penyebaran penyakit tuberkulosis, menganalisis kestabilan model dan mensimulasi model.

KAJIAN TEORI

Persamaan Differensial

Persamaan diferensial banyak muncul sebagai persamaan yang sangat penting dalam matematika terapan, karena banyak hukum dan hubungan fisis secara matematis muncul dalam bentuk persamaan ini. Secara umum persamaan diferensial didefinisikan

Definisi 1. Persamaan Diferensial (Sugiyarto, 2014)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Titik Tetap

Misalkan diberikan persamaan Diferensial sebagaimana persamaan (1).

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^n \tag{1}$$

Titik x^* disebut titik tetap jika memenuhi $f(x^*) = 0$. Titik tetap merupakan penyelesaian yang bergantung pada *t* (konstan terhadap waktu). Titik tetap disebut juga titik kritis atau titik keseimbangan. Untuk selanjutnya digunakan istilah titik tetap (Grimshaw, 1990).

Matriks

Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan diantara dua tanda kurung. Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis diantara dua tanda kurun, yaitu

() atau []. Matriks dapat didefinisikan juga sebagai kumpulan beberapa vektor kolom atau vektor baris (Ruminta, 2014)

Entri yang terletak pada baris I dan kolom j di dalam matriks A dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi, matriks 3×4 dapat ditulis sebagaimana pada persamaan (2).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2. Nilai eigen dan vektor eigen (Sutojo, Bowo, Erna, Astuti, Rahayu, & Mulyanto, 2009)
Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A, jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, seperti persamaan (3).

$$Ax = \lambda x \tag{3}$$

Skalar λ disebut nilai eigen dan x dikatakan vector eigen yang bersesuaian dengan λ. Masalahnya untuk mencari vektor $x \epsilon R^n$, $x \neq o$ dan λ adalah bilangan real yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$, disebut masalah eigen.

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat ditulis pada persamaan (4).

$$Ax = \lambda x \text{ atau } (A - \lambda I)x = 0 \tag{4}$$

Dari persamaan (4) akan mempunyai penyelesaian jika memenuhi persamaan (5).

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) disebut persamaan karakteristik A dan $|A - \lambda I|$ disebut determinan karakteristik dari A.

$|A - \lambda I| = 0$ disebut determinan karakteristik dari A.

Atau secara ekuivalen :

$(\lambda I - A)x = 0$

Berdasarkan persamaan diatas disebut persamaa karakteristik (*characteristic equation*) matriks A.

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwits

Permasalahan yang sering timbul dalam menentukan suatu tipe kestabilan sistem dengan menggunakan nilai eigen adalah ketika mencari akar persamaan karakteristik berorde tinggi. Oleh sebab itu, diperlukan suatu kriteria yang mampu menjamin nilai dari akar suatu persamaan karakteristik tersebut negative atau ada yang bernilai positif. Salah satu kriteria yang efektif untuk menguji kestabilan sistem adalah kriteria routh-hurwitz dapat dilihat pada Tabel 1.

TABEL 1. Rount-Hurwitz

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...	a_{n-1}
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...	a_n
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_n
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
s^0						

(Wahab & Subiantoto, 2004)

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan jumlah rata-rata kasus individu terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan (Diekmann & Heesterbeek, 2000).

Jika $R_0 < 1$ maka penyakit hanya menginfeksi kurang dari satu individu rentan sehingga kemungkinan penyakit akan hilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan. Jika $R_0 = 1$ maka individu yang terinfeksi akan menularkan tepat kepada satu individu.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian terapan. Tujuan Penelitian ini untuk membangun model matematika SEIRS penyebaran penyakit tuberkulosis, menganalisis kestabilan model dan mensimulasi model. Data yang digunakan merupakan data populasi yang menderita penyakit tuberkulosis dari Dinas Kesehatan Kota Makassar tahun 2017. Sementara itu, untuk simulasi digunakan program Maple.

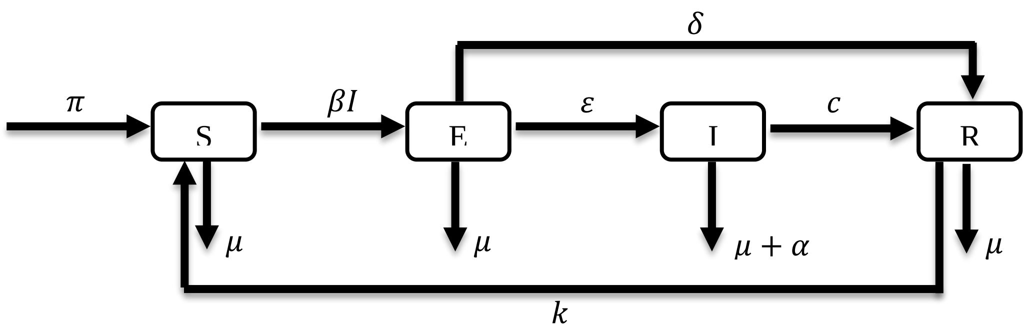
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Model SEIRS Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar

Populasi manusia dibagi menjadi empat kelas yaitu : kelas Susceptible (S) menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit tuberkulosis, kelas exposed (E) menyatakan individu yang terinfeksi tuberkulosis tetapi tidak dapat menularkannya, kelas infected (I) menyatakan jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit tuberkulosis dan kelas Recovered (R) menyatakan individu yang telah sembuh dari penyakit tuberkulosis. Formulasi model dalam penelitian ini menambahkan asumsi bahwa manusia yang pulih dapat rentan kembali terkena penyakit tuberkulosis akibat hilangnya kekebalan tubuh k.

Model untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dalam bentuk diagram transfer sebagimana Gambar 1.



GAMBAR 1. Diagram Transfer Model SEIRS penyakit TB

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh model pada persamaan (6), (7), (8) dan (9)

$$\frac{dS(t)}{dt} = \pi + kR - (\mu + \beta I)S \tag{6}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta IS - (\mu + \varepsilon + \delta)E \tag{7}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \alpha + c)I \tag{8}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = cI + \delta E - (\mu + k)R \tag{9}$$

Titik Equilibrium dan Kestabilannya

Titik Equilibrium bebas Penyakit (E_0)

Titik equilibrium bebas penyakit terjadi pada saat $\left(\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}\right) = (0,0,0,0)$. Berdasarkan persamaan (6), (7), (8) dan (9) dapat ditentukan titik equilibrium bebas penyakit melalui persamaan (10), (11), (12) dan (13).

$$\pi + kR - (\mu + \beta I)S = 0 \tag{10}$$

$$\beta IS - (\mu + \varepsilon + \delta)E = 0 \tag{11}$$

$$\varepsilon E - (\mu + \alpha + c)I = 0 \tag{12}$$

$$cI + \delta E - (\mu + k)R = 0 \tag{13}$$

Untuk mengetahui titik equilibrium bebas penyakit (E_0) maka diasumsikan $E = 0$ dan $I = 0$, yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit dan tidak ada pula penyembuhan.

Dari persamaan (10) diperoleh $S = \frac{\pi + kR}{\mu}$

Dari persamaan (13) diperoleh $R = 0$

Jadi titik equilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\pi + kR}{\mu}, 0,0,0\right)$

Sekarang diselidiki stabilitas titik equilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\pi + kR}{\mu}, 0,0,0\right)$

Untuk mencari Analisis kestabilannya diperoleh dari Matriks Jacobian melalui linerarisasi kemudian menggunakan kriteria Routh-Hurwit maka diperoleh persamaan (14).

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \tag{14}$$

Misalkan:

$a = \alpha + c + \delta + \varepsilon + \mu + 2\mu + k$

$$b = \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \alpha\mu + c\delta + c\varepsilon + c\mu + 2\mu\alpha + 2\mu c + 2\mu\delta + 2\mu\varepsilon + 2\mu^2 + kc + k\delta + k\varepsilon + k\mu + \mu k + k\alpha - \frac{\pi\beta\varepsilon}{\mu}$$

$$c = -2\pi\beta\varepsilon + 2\mu\alpha\delta + 2\mu\alpha\varepsilon + 2\alpha\mu^2 + 2\mu c\delta + 2\mu c\varepsilon + 2c\mu^2 + k\alpha\delta + k\alpha\varepsilon + k\alpha\mu + kc\delta + kc\varepsilon + kc\mu + \mu k\alpha + \mu kc + \mu k\delta + \mu k\varepsilon + k\mu^2 - \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu}$$

$$d = \mu k\alpha\delta + \mu k\alpha\varepsilon + k\alpha\mu^2 + \mu kc\delta + \mu kc\varepsilon + kc\mu^2 - \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu}$$

Karena semua suku positif maka sistem tersebut stabil, maka syarat perlu dan cukup untuk stabil terpenuhi. Sistem stabil $d > 0$ dimana parameternya $\epsilon(0,1)$.

Titik Equilibrium Endemik (E_1)

Untuk mengetahui titik equilibrium endemik, misalkan $E_1(S^*, E^*, I^*, R^*)$ maka diasumsikan $E \neq 0$ dan $I \neq 0$. Berdasarkan persamaan (10), (11), (12) dan (13). Dilakukan proses penyederhanaan system sehingga diperoleh

Dari persamaan (10) diperoleh $S^* = \frac{\pi+kR}{\mu+\beta}$

Dari persamaan (11) diperoleh $E^* = \frac{\beta\pi+kR}{(\mu+\beta)(\mu+\varepsilon+\delta)}$

Dari persamaan (12) diperoleh $I^* = \frac{\varepsilon\beta\pi+kR}{(\mu+\beta)(\mu+\varepsilon+\delta)(\mu+\alpha+c)}$

Dari persamaan (13) diperoleh $R^* = \frac{c(\varepsilon\beta\pi+kR)+\delta(\beta\pi+kR)(\mu+\alpha+c)}{(\mu+k)(\mu+\beta)(\mu+\varepsilon+\delta)(\mu+\alpha+c)}$

Jadi titik equilibrium endemiknya adalah

$$E_1 = (\frac{\pi + kR}{\mu + \beta}, \frac{\beta\pi + kR}{(\mu + \beta)(\mu + \varepsilon + \delta)}, \frac{\varepsilon\, \beta\pi + kR}{(\mu + \beta)(\mu + \varepsilon + \delta)(\mu + \alpha + c)}, \frac{c(\varepsilon\beta\pi + kR) + \delta(\beta\pi + kR)(\mu + \alpha + c)}{(\mu + k)(\mu + \beta)(\mu + \varepsilon + \delta)(\mu + \alpha + c)})$$

Untuk mencari Analisis kestabilannya diperoleh dari Matriks Jacobian melalui linerarisasi kemudian menggunakan kriteria Routh-Hurwit maka diperoleh persamaan (15).

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \tag{15}$$

Misalkan

$$a = \alpha + c + \delta + k + 3\mu + I^*\beta$$

$$\begin{aligned} b = {} & 3\mu^2 + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \alpha k + 3\alpha + c\delta + c\delta + c\varepsilon + ck + 3c\mu + \delta k + 2\delta\mu + \varepsilon k + 2\varepsilon\mu + 2k\mu \\ & + I^*\alpha\beta + I^*\beta c + I^*\beta\delta + I^*\beta\varepsilon + I^*\beta k + 2I^*\beta\mu - S\beta\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & \mu^3 + 2I^*S^*\beta^2\varepsilon + I^*\alpha\beta\varepsilon + I^*\alpha\beta k + 2I^*\alpha\beta\mu + 2I^*\beta c\delta + I^*\beta c\delta + I^*\beta c\varepsilon + I^*\beta ck \\ & + 2I^*\beta c\mu + 2I^*\beta\delta k + I^*\beta\delta\mu + I^*\beta\varepsilon k + I^*\beta c\varepsilon + I^*\beta ck + 2I^*\beta c\mu + 2I^*\beta\delta k \\ & + I^*\beta\delta\mu - I^*\beta\varepsilon k + I^*\beta\varepsilon\mu + I^*\beta\kappa\mu - S^*\beta\varepsilon k - 2S^*\beta\varepsilon\mu + 3\alpha\mu^2 + 3c\mu^2 \\ & + \delta\mu^2 + \varepsilon\mu^2 + k\mu^2 + \alpha\varepsilon k + 2\alpha\varepsilon\mu + 2\alpha k\mu + c\delta k + 2c\delta\mu + c\varepsilon k + 2c\varepsilon\mu \\ & + 2ck\mu + \delta k\mu + \varepsilon k\mu + I^*\beta\mu^2 + \alpha\delta k + 2\alpha\delta\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = {} & \alpha\mu^3 + c\mu^3 + 2IS^*\beta^2\varepsilon k + 2I^*S^*\beta^2\varepsilon\mu + 2I^*\alpha\beta\delta k + I^*\alpha\beta\delta\mu + I^*\alpha\beta\varepsilon k + I^*\alpha\beta\varepsilon\mu \\ & + I^*\alpha\beta k\mu + I^*\beta c\delta\mu + 2I^*\beta c\varepsilon k + I^*\beta c\varepsilon\mu + I^*\beta ck\mu + I^*\beta c\varepsilon\mu + I^*\beta ck\mu \\ & - S^*\beta\varepsilon k\mu + \alpha\delta\mu^2 + \alpha\varepsilon\mu^2 + \alpha k\mu^2 + c\varepsilon\mu^2 + ck\mu^2 + \alpha\varepsilon k\mu + c\delta k\mu + c\varepsilon k\mu \\ & + I^*\alpha\beta\mu^2 + I^*\beta c\mu^2 - S^*\beta\varepsilon\mu^2 + \alpha\delta k\mu \end{aligned}$$

Polynomial orde empat mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen dari kolom pertama pada tabel Rounth Hurwitz mempunyai tanda sama. Sehingga diperoleh $R_0 > 1$ maka titik setimbang endemik stabil asimtotik.

Bilangan Reproduksi dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar dari penyakit tuberkulosis diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks jacobian dari suatu sistem persamaan yang dihitung pada titik equilibrium bebas penyakit.

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + (\alpha + c + \delta + \varepsilon + \mu + 2\mu + k)\lambda^3 + (-\frac{\pi\beta\varepsilon}{\mu} + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \alpha\mu + c\delta + c\varepsilon + \\ & c\mu + 2\mu\alpha + 2\mu c + 2\mu\delta + 2\mu\varepsilon + 2\mu^2 + kc + k\delta + k\varepsilon + k\mu + \mu k + k\alpha)\lambda^2 + \\ & (-2\pi\beta\varepsilon + 2\mu\alpha\delta + 2\mu\alpha\varepsilon + 2\alpha\mu^2 + 2\mu c\delta + 2\mu c\varepsilon + 2c\mu^2 - \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu} + k\alpha\delta + \\ & k\alpha\mu + kc\delta + kc\varepsilon + kc\mu + \mu k\alpha + \mu kc + \mu k\delta + \mu k\varepsilon + k\mu^2)\lambda - \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu} + \\ & \mu k\alpha\delta + \mu k\alpha\varepsilon + k\alpha\mu^2 + \mu kc\delta + \mu kc\varepsilon + kc\mu^2 \end{aligned}$$

Nilai reproduksi dasar dari persamaan diatas diperoleh dari bagian konstannya, sehingga diperoleh:

$$\mu k\alpha\delta + \mu k\alpha\varepsilon + k\alpha\mu^2 + \mu kc\delta + \mu kc\varepsilon + kc\mu^2 - \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu} = 0$$

$$R_0 = \frac{k\pi\beta\varepsilon}{\mu(\mu k\alpha\delta + \mu k\alpha\varepsilon + k\alpha\mu^2 + \mu kc\delta + \mu kc\varepsilon + kc\mu^2)}$$

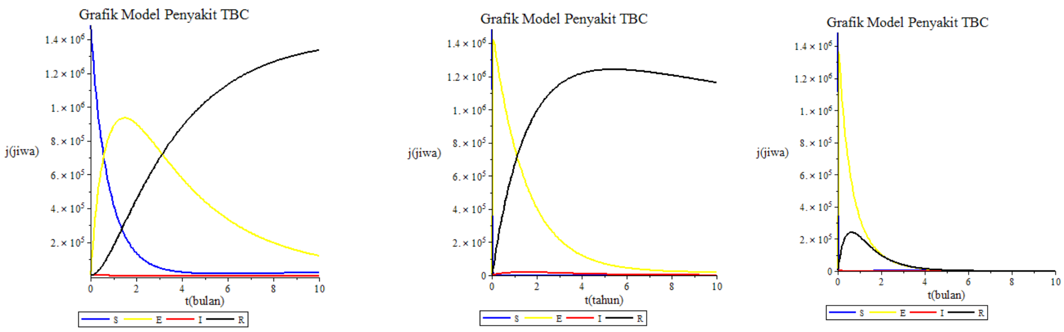
Parameter model SEIRS dapat dilihat pada Tabel 2.

TABEL 2. Parameter Model SEIRS

Simbol	**Nilai Parameter 1**	**Nilai Parameter 2**	**Nilai Parameter 3**
π	0,083	0,092	0,985
ε	0,001	0,021	0,912
β	0,001	0,034	0,856
μ	0,001	0,021	0,993
α	0,362	0,401	0,798
c	0,167	0,221	0,865
k	0,004	0,009	0,680
δ	0,5	0,62	0,723

Simulasi Model

Simulasi model penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar dilakukan setelah melakukan analisis model, indentifikasi variabel dan pengambilan data. Model yang dibentuk kemudian dianalisis. Setelah menganalisis model dilakukan indentifikasi variabel. Data yeng telah diperoleh kemudin di simulasi, dilihat pada Gambar 2.



(a) Parameter 1 (b) Parameter 2 (c) Parameter 3

GAMBAR 2. Kurva model penyakit TBC

Gambar 2(a) menjelaskan kurva model SEIRS pada penyakit tuberkulosis dengan menggunakan nilai dari parameter 1 yang diperoleh dari data Dinas Kesehatan Kota Makassar**.** Gambar 2(a) menunjukkan bahwa individu rentan mengalami penurunan secara drastis hingga tahun ke-2 dan kemudian menjadi konstan. Individu *exposed* mengalami kenaikan secara drastis hingga tahun pertama dan mengalami penuruanan secara drastis. Individu terinfeksi konstan secara terus menurus setiap tahunnya. Individu sembuh mengalami kenaikan secara drastis.

Gambar 2(b) menunjukkan kurva model SEIRS pada penyakit tuberkulosis dengan menggunakan nilai dari parameter 2 yang diasumsikan lebih besar dari parameter 1. Gambar 2(b) menunjukkan bahwa individu rentan secara konstan mendekati 0 jiwa . Jumlah *exposed* bereda di 14.000.000 jiwa yang kemudian menurun secara drastis. Individu terinfeksi konstan secara terus menurus setiap tahunnya. Individu sembuh mengalami kenaikan secara drastis hingga tahun ke-7 dan pada tahun selanjutnya menurun secara perlahan.

Gambar 2(c) menggambarkan kurva model SEIRS pada penyakit tuberkulosis dengan menggunakan nilai dari parameter 3 yang diasumsikan lebih besar dari parameter 1 dan parameter 2. Individu rentan secara konstan mendekati 0 jiwa . Individu *exposed* bereda di 14.000.000 jiwa yang kemudian menurun secara drastis kemudian menjadi konstan. Individu terinfeksi konstan secara terus menurus setiap tahunnya. Individu sembuh mengalami kenaikan pada tahun ke-0 dan menurun di tahun ke-1 kemudian menjadi konstan.

PEMBAHASAN

Penelitian sebelumnya tentang model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis, telah dilakukan oleh Side (2015), Awaliya (2016) dan Fadilah & Zulakmal (2016). Penelitian Side (2015) menggunakan model SIR dimana populasi dibagi menjadi tiga kelas yaitu *Susceptible*, *Infected* dan *Recovered*. Hasil yang diperoleh bahwa semakin menurun nilai parameter yang digunakan maka *susceptible* semakin meningkat dan *infected* semakin meningkat sementara *recovered* mengalami peningkatan seiring berjalannya waktu.

Penelitian Awaliya (2016) menggunakan model SEIR yang merupakan pengembangan model dari penelitian yang dilakukan Side. Awaliya menambahkan kelas *Exposed* (E) dan memperhatikan faktor pengobatan dalam penelitiannya. Hasil yang diperoleh bahwa semakin sering populasi terdeteksi dan terinfeksi penyakit tuberkulosis berobat, maka jumlah populasi yang terinfeksi akan berkurang dan jumlah populasi yang sembuh akan semakin meningkat.

Penelitian Fadilah & Zulakmal (2016) menggunakan model SEIR penyebaran penyakit tuberkulosis. Nilai parameter-parameter yang digunakan diperulah nilai $R_0 = 28{,}42$. Hal ini menunjukkan bahwa kasus penyakit tuberkulosis berpotensi menjadi endemik yaitu penyakit tuberkulosis menyerang beberapa orang dalam suatu wilayah yang luas.

Penelitian ini menjelaskan mengenai pembuatan modifikasi model dari model yang telah dilakukan oleh Side (2015) dan Awaliya (2016) menjadi SEIRS dengan menambahkan parameter kehilangan kekebalan setelah sembuh dari penyakit tuberkulosis. Data yang digunakan merupakan penderita penyakit tuberkulosis yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Makassar tahun 2017. Hasil simulasi diperoleh bahwa semakin besar laju penularan suatu penyakit mengakibatkan populasi pada kelas infected mengalami penurunan yang menyebabkan populasi pada kelas exposed semakin menurun dan kelas susceptible semakin menurun serta kelas recovered semakin meningkat dan semakin besar parameter yang digunakan mengakibatkan penyakit tuberkulosis menjadi konstan.

KESIMPULAN

Penyakit tuberkulosis berbentuk diagram transfer kemudian dibentuk menjadi persamaan differensial yaitu:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \pi + kR - (\mu + \beta I)S$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta IS - (\mu + \varepsilon + \delta)E$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \alpha + c)I$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = cI + \delta E - (\mu + k)R$$

Analisis kestabilan bilangan reproduksi dasar (R_0) model SEIRS pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar diperoleh nilai sebesar 0,312 berarti bahwa seseorang yang terinfeksi penyakit tuberkulosis tidak menyebabkan orang lain terkena penyakit tuberculosis.

Hasil simulasi numerik model SEIRS pada penyebaran penyakit tuberkulosis diperoleh semakin besar laju penularan suatu penyakit mengakibatkan populasi pada kelas *infected* mengalami penurunan yang menyebabkan populasi pada kelas *exposed* semakin menurun dan kelas *susceptible* semakin menurun serta kelas *recovered* semakin meningkat dan semakin besar parameter yang digunakan mengakibatkan penyakit tuberkulosis akan menjadi konstan.

DAFTAR PUSTAKA

Awaliya, W., N. (2016). *Model SEIR pada Penyakit Tuberkulosis di Kabupaten Bulukumba* (Skripsi). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Diekmann. O., & Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemilogy of Infectious Disease*. New York: John Wiley and Son.

Fadilah, F., H, & Zulakmal. (2016). Kajian Perilaku Model Matematika Penularan Penyakit Tuberkulosis, *Jurnal Matematika UNAND, 5*(2). 26-32.

Grimshaw, R. (1990). *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Boston: Blackwell Scientific Publication.

Hasrina. (2015). *Model SIR (Susceptible, Infectious And Recovered) pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar* (Skripsi). Universitas Negeri Makassar, Indonesia

Marfianti. (2015). *Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Campak di Kota Makassar* (Skripsi*)*. Universitas Negeri Makassar, Indonesia.

Rafflesia, U. (2014). Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis, *Jurnal Gradien, 10*(2). 983-986.

Ruminta. (2014). *Matriks Persamaan Liner dan Pemprrograman Linier.* Bandung: Rekayasa Sains.

Sanusi, W., Alimuddin., & Islam, A. D. N. (2018). Model Regresi Cox Non Proporsional Hazard dan Aplikasinya pada Data Ketahanan Hidup Pasien Penderita Tuberkulosis di Balai Besar Kesehatan Paru Masyarakat Makassar. *Journal of mathematics, and Statistics, 1*(1). 46-61.

2018, S. (2015). A Susceptible-Infected-Recovered Model and Simulation for Transmission of Tuberculosis, *Jurnal American Scientific Publishers,* 21(2). 137-139.

Side, S., Sukarna., & Asfarina. G. T. (2018). Analisis Kestabilan Penyebaran Kelera Menggunakan Model SEIRS dengan Vaksinasi dan Faktor Treatment. *Journal of Mathematics, and Statistics, 1*(2). 155-168.

Sugiyarto. (2014). *Persamaan Diferensial dilengkapi Contoh Penyelesaian Masalah untuk Umum dan Mahasiswa*. Yogyakarta: Binafsi Publisher.

Sutojo, T., Bowo, N., Erna, A., Astuti, A., Rahayu, Y., & Mulyanto, E. (2009). *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks.* Semarang: Andi Offise.

Wahab, W. & Subiantoro, A. (2004). *Fundamental of Control system Stability Criterion-Routh Hurwit.*

WHO. (2016). *Profil Kesehatan Indonesia.* Jakarta: KemenKes.