Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 94 – 107)
Vol. 1. No. 2, Oktober 2018
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Analisis Dan Simulasi Persamaan Differensial Pada Pemodelan Penyakit Campak di Kota Parepare

Syafruddin Side[1], Rahmat Syam[1] dan Meisy Tri Elsa[1, a)]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar,90224*

[a)]iskandarmeisy@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini membahas mengenai model matematika SEIRV pada penyakit campak di kota Parepare. Data yang digunakan adalah data jumlah penderita penyakit campak di kota Parepare tahun 2015 dari Dinas Kesehatan Kota Parepare. Pembahasan dimulai dari membangun model matematika SEIRV penyakit campak, penentuan titik ekulibrium, selanjutnya mencari analisis kestabilan titik ekuilibrium dan membuat simulasi model. Penulisan tugas akhir ini dilakukan dengan menggunakan metode kajian literatur. Penulisan ini diharapkan dapat memberikan gambaran umum tentang model matematika SEIRV. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu mengidentifikasi masalah, menyusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model, membuat diagram transfer, mengidentifikasikan parameter-parameter, menentukan titik ekuilibrium kemudian melakukan analisis kestabilan dan mansimulasikan model. Berdasarkan hasil yang diperoleh, vaksinasi adalah cara terbaik dalam penyembuhan penyakit campak.*
Kata Kunci: *campak, vaksinasi, SEIRV.*

Abstract. *This research discusses the SEIRV model of measles. The data used is the number of people with measles in Parepare City in 2015. This data is obtained from Parepare City Health Department. The discussion begins with constructing the SEIRV model of measles,determining the equilibrium point and analyzing the stability. Then, creating a simulation model. This research is conducted by using method of literature study. It is expected to proside an overview of the SEIRV mathematical model. The steps taken are identifying the problem, formulating assumptions to obtained, vaccination is the best way to cure measles*
Keyword: *Measles, Vaccination, SEIRV.*

PENDAHULUAN

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkap perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika dibuat berdasarkan asumsi-asumsi. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu yang dapat dibuat model matematikanya, misalnya bidang kesehatan, seperti model matematika pada penyakit campak (Marfianti, 2015).

Penyakit campak (*measles*) adalah suatu infeksi virus yang sangat menular, yang dapat ditandai dengan nyeri pada tenggorokan, demam, batuk, dan ruam kulit. Penyebab dari penyakit ini karena infeksi virus campak yang bernama *Paramyxovirus*. Penyakit tersebut dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, udara, batuk atau bersin, maupun kotoran manusia. Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal usia maupun jenis kelamin. Akan tetapi, penyakit ini lebih banyak menyerang anak-anak daripada orang dewasa. Hal ini disebabkan oleh daya tahan tubuh anak-anak yang relatif lebih lemah dibanding orang dewasa. Menurut *The United Nations Children's Fund* (UNICEF), sekitar 30.000 anak di Indonesia meninggal dunia setiap tahun karena penyakit campak. Sedangkan menurut *World Health Organization* (WHO), sekitar 242.000 anak diseluruh dunia meninggal dunia pada tahun 2006 karena penyakit tersebut. Besarnya jumlah kematian karena penyakit campak menunjukkan bahwa penyakit tersebut memang sangat berbahaya dan kita harus melakukan pencegahan.

Pencegahan penyakit campak dilakukan dengan cara program imunisasi dengan memberikan vaksinasi campak. Program imunisasi campak di Indonesia dimulai tahun 1982. Menurut Riskesdas tahun 2010, anak-anak Indonesia berusia 1-2 tahun yang mendapat imunisasi campak mencapai rata-rata 74,4%. Sedangkan, capaian imunisasi campak di indoensia hingga bulan Desember tahun 2013 adalah sebesar 90,82%. Meski capaian imunisasi campak di Indonesia telah mencakupi 90%, WHO melaporkan terdapat sekitar 6.300 kasus campak di Indonesia pada tahun 2013. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik Provinsi Sulawesi Selatan 2015, Kota Parepare termasuk sebagai 10 besar daerah yang mempunyai angka populasi penderita penyakit campak, yakni berada pada urutan ke 8 di Sulawesi Selatan.

Penelitian ini menggunakan model *SEIRV(Susceptible-Exposed-Infected-Recovered-Vaccinated)* yang merupakan perluasan model SEIR dengan pengaruh vaksinasi yang diijadikan sebagai penelitian sebelumnya. Populasi model untuk penyakit campak dibagi menjadi lima kelompok yaitu kelompok individu yang rentan sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit *(Susceptible)*, kelompok individu yang terdeteksi penyakit tetapi belum terinfeksi *(Exposed)*, kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit *(Infected)*, kelompok individu yang sembuh dan kebal dari penyakit *(Recovered)*, dan kelompok individu yang terbebas dari penyakit dan tidak dapat terinfeksi kembali *(Vaccinated)*. Model ini menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi *exposed* melalui kontak langsung maupun perantara lain. Individu *exposed* menjadi *infected* ketika ketahanan tubuh menurun. Kemudian individu *infected* yang mampu bertahan hidup akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered*. Dan *recorvered* yang sudah sembuh melakukan pertahan tubuh agar tidak terkena penyakit kembali dan memasuki kelompok *Vaccinated*. Dari berbagai bidang ilmu yang dapat dibuat model matematika salah satunya adalah model matematika penyakit campak. Penelitian ini menganalisis dan mensimulasikan sistem persamaan differensial pada pemodelan penyebaran penyakit campak untuk mengetahui perilaku penyebaran campak Di Kota Parepare.

Determinan Matriks

Setiap matriks bujur sangkar -n $\mathrm{A} = [\mathrm{a_{ij}}]$ ditetapkan memiliki skalar khusus yang disebut determinan dari A yang dinotasikan dengan det (A) atau $|A|$ yang biasanya dinyatakan dalam bentuk pada persamaan (1) (Olsder, 1994).

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (eigen vector) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yang biasanya dinyatakan dalam bentuk pada persamaan $Ax = \lambda x$ Untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dariA, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n \times n}, Ax = \lambda$, yang biasanya dinyatakan dalam bentuk $Ax = \lambda Ix$ Atau secara ekuivalen $(\lambda I - A)x = 0$ Persamaan ini disebut persamaan karakteristik (characteristic equation) matriks A. Skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A (Bender, 1978).

Persamaan Differensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas sebagaimana pada persamaan (2) (Olsder, 1994).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

Titik Ekuilibrium

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium (titik keseimbangan) sistem jika $f(\hat{x}) = 0$ (Bender, 1978).

Kestabilan

Diberikan $\hat{x} \in R^n$ titik ekuilibrium system. Titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil local jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \hat{x}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq t_0$. Titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil asimtotik lokal, jika titik ekuilibrium $\hat{x}$ stabil dan jika terdapat $\delta_0 > 0$, sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} x(t) = \hat{x}$. Suatu titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan tak stabil, jika tidak dipenuhi (i) [4].

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Diberikan sistem dengan λ merupakan nilai eigen matriks A. Jika bagian real semua nilai eigen matriks A bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks A yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ tidak stabil (Perko, 1991).

Matriks Jacobian

Diberikan $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pada sistem persamaan (1) dengan $f_1 \in C^1(E), i = 1,2, \ldots, n$

$$\text{Matriks } J\big(f(x)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x)\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x [4].

Linearisasi

Diberikan $\hat{x}$ titik ekuilibrium sistem $\dot{x} = f(x)$ sistem $\hat{x} = J\big(f(\hat{x})\big)x$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ disekitar $\hat{x}$. Setelah proses linearisasi dilakukan pada sistem $\dot{x} = f(x)$, selanjutnya perilaku kestabilan disekitar titik ekuilibrium ditentukan seperti pada sistem linear, asalkan titik ekuilibrium tersebut hiperbolik [4].

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlahindividu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Bilangan tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan (model) yang dihitung pada titik equilibrium bebas penyakit [6]:

Ada beberapa kondisi yang akan timbul dalam penentuan R_0, yaitu:

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Campak

Penyakit campak (*measles*) adalah suatu infeksi virus yang sangat menular, yang ditandai dengan nyeri tenggorokan, demam, batuk dan ruam kulit. Penyakit ini disebabkan karena infeksi virus campak dari family *paramyxovirus* dan genus *morbillivirus*. Penyakit ini dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, udara, batuk, bersin dan kotoran manusia. Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Namun, penyakit ini lebih banyak menyerang anak-anak dibanding orang dewasa. Hal ini disebabkan oleh daya tahan tubuh anak-anak relatif lebih lemah dibanding orang dewasa (Maesaroh, 2013). Campak ditularkan melalui penyebaran droplet, kontak langsung, melalui hidung atau tenggorokan dari orang yang terinfeksi. Masa penularan berlangsung mulai dari hari pertama sebelum munculnya gejala prodomal, biasanya sekitar 4 hari sebelum timbulnya ruam, minimal hari kedua setelah timbulnya ruam. Jika seseorang pernah menderita campak, maka seumur hidupnya dia akan kebal terhadap penyakit ini. Kekebalan terhadap campak diperoleh setelah vaksinasi, infeksi aktif dan kekebalan pasif pada seorang bayi yang lahir dari ibu yang telah kebal (Marfianti, 2015).

Maple

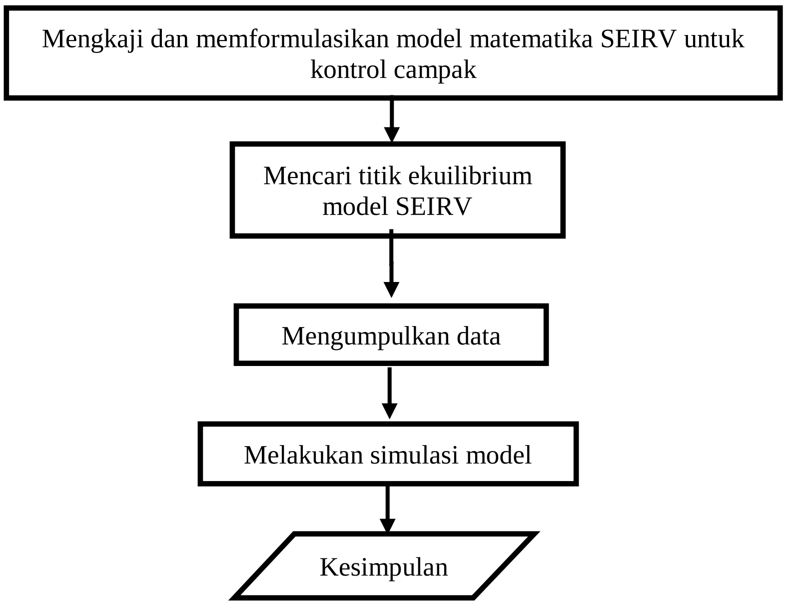
Maple merupakan salah satu perangkat lunak (software) yang dikembangkan oleh Waterloo Inc Kanada. Maple sering digunakan untuk keperluan *ComputerAlgebraic System (CAS).* Menu-menu yang terdapat pada tampilan program Maple ini terdiri dari menu *file, edit, view, insert, format, spreaadsheet, option, window,* dan *help.* Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada system operasi windows. Maple sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan differensial antara lain: *diff* digunakan untuk menurunkan suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, *evalf* memberikan nilai numeric dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada maple digunakan perintah *plot, plot2d, plot3d,* tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d* [8].

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian terapan (*applied research*) dengan pendekatan kuantitatif yaitu dengan mengambil atau mengumpulkan data yang diperlukan dan menganalisisnya serta melakukan simulasi menggunakan Maple. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder penderita penyakit campak di Dinas Kesehatan Kota Parepare. Jumlah data yang diperoleh positif terkena campak sebanyak 6 individu.

Skema Penelitian

Skema penelitian, ditunjukkan pada Gambar 1 yaitu:



GAMBAR 1. Skema Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

Formulasi Model

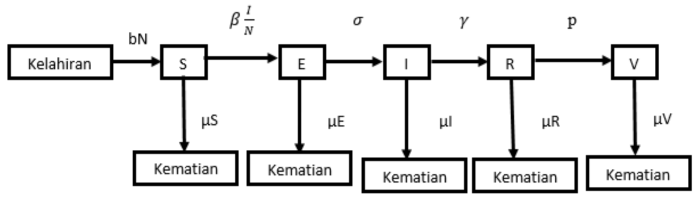
Model SEIRV memiliki populasi total (N) dibagi menjadi lima kelompok yaitu, kelompok individu yang rentan sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit *(Susceptible)*, kelompok individu yang terdeteksi penyakit tetapi belum terinfeksi *(Exposed)*, kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit *(Infected)*, kelompok individu yang sembuh dan kebal dari penyakit *(Recovered)*, dan kelompok individu yang terbebas dari penyakit dan tidak dapat terinfeksi kembali *(Vaccinated)*.

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk merumuskan model matematika penyakit campak, yaitu :

1. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi
2. Tidak terdapat imigrasi
3. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan
4. Setiap individu yang terdeteksi akan menjadi terinfeksi
5. Masa inkubasi penyakit campak (singkat) 10-14 hari
6. Penyakit berbahaya, jika terinfeksi dapat menimbulkan kematian

7. Individu yang telah sembuh jika divaksinasi akan kebal terhadap penyakit campak dan tidak menjadi rentan kembali
8. Populasi konstan (tertutup).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, diperoleh skema dinamika populasi model matematika SEIRV penyakit campak, sebagaimana pada Gambar 2.



GAMBAR 2. Skema Dinamika Populasi Model SEIRV pada Penyakit Campak

Berdasarkan Gambar 2 diperoleh model matematika SEIRV penyakit campak sebagaimana persamaan (4) sampai dengan (8)

$$bN - \beta S\frac{I}{N} - \mu S \tag{4}$$

$$\beta S\frac{I}{N} - \sigma E - \mu E \tag{5}$$

$$\sigma E - \gamma I - (\mu + \delta)I \tag{6}$$

$$\gamma I - \rho R - \mu R \tag{7}$$

$$\rho R - \mu V \tag{8}$$

Titik Ekuilibrium

Sistem persamaan di atas akan menjadi tertutup jika $\frac{dN}{dt} = 0$, dengan pembuktian sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(S+E+I+R+V)}{dt}$$

$$= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

$$= \left(\text{bN-}\beta\text{S}\frac{\text{I}}{\text{N}}\text{-}\mu\text{S}\right) + \left(\beta\text{S}\frac{\text{I}}{\text{N}}\text{-}(\sigma+\mu)\text{E}\right) + (\sigma\text{E-}\gamma\text{I-}(\mu+\delta)\text{I}) + (\gamma\text{I-}(\text{p}+\mu)\text{R} + (\text{pR-}\mu\text{V})$$

$$= bN - \mu S - \mu E - \mu I + \delta I - \mu R - \mu V$$

$$= bN - \mu N - \delta I$$

$$= bN - (\mu N + \delta I)$$

$$= 0 \qquad\qquad \rightarrow \therefore \, tertutup$$

Berarti banyaknya populasi pada saat t adalah konstan atau terbukti populasi model SEIRV tersebut tertutup, yaitu jumlah kelahiran sama dengan jumlah kematian.

Berdasarkan sistem persamaan di atas diperoleh dua jenis titik ekuilibrium, yaitu :

1. Titik ekulibrium bebas penyakit, yaitu suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam ppopulasi.
2. Titik ekuilibrium endemi, yaitu suatu keadaan dimana terjadi penyebaran penyakit menular di dalam populasi tersebut.

Jika I = 0 maka tidak ada individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit campak kepada individu yang lainnya. Sistem ini mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{bN}{\mu}, 0{,}0, \frac{1}{(p-\mu)R}, \frac{pR}{\mu}\right)$$

Jika $I \neq 0$ maka ada individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit campak kepada individu yang lainnya. Persamaan ini mempunyai titik ekuilibrium endemi $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*, V^*)$ dengan persamaan (9) sampai dengan (13)

$$S^* = \frac{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)N}{\sigma\beta} \quad (9)$$

$$E^* = \frac{\big(b\gamma\beta - \mu(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)\big)N}{\sigma^2+\mu} \quad (10)$$

$$I^* = \frac{\big(b\gamma\beta - \mu(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)\big)N}{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)} \quad (11)$$

$$R^* = \frac{b\gamma\beta - \mu(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)\gamma N}{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)} \quad (12)$$

$$V^* = \frac{b\gamma\beta - \mu(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)\gamma N}{p\mu^2(\sigma+\mu)(\gamma+\mu+\delta)} \quad (13)$$

Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Kestabilan pada titik keseimbangan dapat dilihat dari nilai eigennya. Jika semua nilai positif, maka titik keseimbangan tidak stabil dan jika semua nilai eigennya negatif, maka titik keseimbangan stabil. Titik kesetimbangan model SEIRV, dianalisis dengan linearisasi pada model SEIRV. Persamaan yang akan digunakan dalam linearisasi adalah persamaan (14) sampai dengan persamaan (18).

$$f_1 = bN - \beta S\frac{I}{N} - \mu S \quad (14)$$

$$f_2 = \beta S\frac{I}{N} - \sigma E - \mu E \quad (15)$$

$$f_3 = \sigma E - \gamma I - (\mu+\delta)I \quad (16)$$

$$f_4 = \gamma I - \rho R - \mu R \quad (17)$$

$$f_5 = \rho R - \mu V \quad (18)$$

Untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi terhadap persamaan di atas.

Selanjutnya, dibentuk matriks jacobian persamaan di atas, sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta S} & \frac{\delta f_1}{\delta E} & \frac{\delta f_1}{\delta I} & \frac{\delta f_1}{\delta R} & \frac{\delta f_1}{\delta V} \\ \frac{\delta f_2}{\delta S} & \frac{\delta f_2}{\delta E} & \frac{\delta f_2}{\delta I} & \frac{\delta f_2}{\delta R} & \frac{\delta f_2}{\delta V} \\ \frac{\delta f_3}{\delta S} & \frac{\delta f_3}{\delta E} & \frac{\delta f_3}{\delta I} & \frac{\delta f_3}{\delta R} & \frac{\delta f_3}{\delta V} \\ \frac{\delta f_4}{\delta S} & \frac{\delta f_4}{\delta E} & \frac{\delta f_4}{\delta I} & \frac{\delta f_4}{\delta R} & \frac{\delta f_4}{\delta V} \\ \frac{\delta f_5}{\delta S} & \frac{\delta f_5}{\delta E} & \frac{\delta f_5}{\delta I} & \frac{\delta f_5}{\delta R} & \frac{\delta f_5}{\delta V} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Selanjutnya akan dilakukan linearisasi,

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\beta\frac{I}{N}-\mu & 0 & -\beta\frac{S}{N} & 0 & 0 \\ \beta\frac{I}{N} & -(\mu+\sigma) & \beta\frac{S}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma-(\mu+\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(p-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -\mu \end{bmatrix} \quad (20)$$

Kestabilan titik Ekuilibrium bebas penyakit model SEIRV

$$J_0 \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \frac{-\beta b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu+\sigma) & \frac{\beta b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma-(\mu+\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(p-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -\mu \end{bmatrix} \quad (21)$$

Untuk mencari nilai eigen matriks jacobian bebas penyakit

$$|\lambda I - J_0| = 0 \quad (22)$$

$$Det \left\| \begin{bmatrix} -\mu-\lambda & 0 & \frac{-\beta b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu+\sigma+\lambda) & \frac{\beta b}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu+\sigma+\lambda+\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(p-\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & -\mu-\lambda \end{bmatrix} \right\|$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut :

$$(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\sigma)(\lambda+\gamma+\mu+\sigma)(\lambda+p+\mu)(\lambda+\mu) = 0$$

$$(\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu+\sigma)(\lambda+\gamma+\mu+\sigma)(\lambda+p+\mu) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^5 + (p+5\mu+2\sigma+\gamma)\lambda^4(11\mu^2+\sigma^2+2\mu p+8\mu\sigma+p\gamma+2\gamma\mu+\sigma\gamma+2p\mu+2\gamma)\lambda^3 \\ + (10\mu^3+5\mu^2+p\sigma^2+3\sigma^2\mu+6\mu\sigma p+2\mu^2\sigma p+3\mu\gamma p+6\mu^2\gamma+p\sigma\gamma \\ + 3\sigma\gamma\mu+10\mu^2\sigma+\mu^2 p)\lambda^2 \\ + (3\mu^4+\mu\sigma^2+2\mu^3 p+2\mu^2\sigma p+4\mu^3\sigma+\mu^2 p\gamma+2\gamma\mu^3+\sigma\gamma\mu^3)\lambda+\mu^5 \\ + \mu^4 p+p\sigma^2\mu^2+\sigma^2\mu^3+2\mu^3\sigma p+2\mu^4\sigma p+\gamma\mu^3 p+\mu^4\gamma+p\gamma\mu^2+\sigma\gamma\mu^3 \\ = 0 \end{aligned}$$

Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

$$\left\| \begin{bmatrix} \left(\beta\frac{I^*}{N}+\mu+\lambda\right) & 0 & \beta\frac{S^*}{N} & 0 & 0 \\ -\beta\frac{I^*}{N} & (\mu+\sigma+\lambda) & -\beta\frac{S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & (\mu+\sigma+\lambda+\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & (p-\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & \mu+\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut :

$$\left(\lambda + \beta\frac{I^*}{N} + \mu\right)(\lambda + \mu + \sigma)(\lambda + \mu + \sigma + \gamma)(\lambda + \mu) = 0$$

$$\lambda^5 + \left(5\mu + p + 2\sigma + \gamma + \beta\frac{I^*}{N}\right)\lambda^4 + (4p\mu + 9\mu^2 + 8\mu\sigma + 2p\sigma + 4\mu\gamma + \gamma p + \sigma^2 + \sigma + 2\beta\frac{I^*}{N}4\mu + \beta\frac{I^*}{N}p + \beta\frac{I^*}{N}2\sigma + \beta\frac{I^*}{N}\gamma)\lambda^3 + \left(5p\mu^2 + 6\mu^3 + 6p\mu\sigma + 8\sigma\mu^2 + 3\gamma p\mu + 6\gamma\mu^2 + 3\mu\sigma^2 + p\sigma^2 + 4\mu\gamma\sigma + p\sigma\gamma + 2\beta\frac{I^*}{N}3p\mu + 3\beta\frac{I^*}{N}6\mu^2 + \beta\frac{I^*}{N}4\mu\sigma + \beta\frac{I^*}{N}2p\sigma + 2\beta\frac{I^*}{N}3\mu\gamma + \beta\frac{I^*}{N}\gamma p + \beta\frac{I^*}{N}\sigma^2 + \beta\sigma\gamma\right)\lambda^2 + \left(4p\mu^3 + 5\mu^4 + 6p\mu^2\sigma + 8\mu^3\gamma + 3\mu^3\gamma + 2\sigma^2 p\mu + 3\mu^2\sigma^2 + 2\sigma\gamma p\mu + \sigma\gamma\mu^2 + 2\beta\frac{I^*}{N}3p\mu^2 + \beta\frac{I^*}{N}2\mu^3 + \beta\frac{I^*}{N}4\mu\sigma p + 2\beta\frac{I^*}{N}6\sigma\mu^2 + 2\beta\frac{I^*}{N}2\gamma p\mu + 2\beta\frac{I^*}{N}3\gamma\mu^2 + \beta\frac{I^*}{N}2\mu\sigma^2 + \beta\frac{I^*}{N}p\sigma^2 + \beta\frac{I^*}{N}2\mu\sigma + \beta\frac{I^*}{N}p\sigma\gamma + 2\mu^2\sigma\gamma\right)\lambda + \beta\frac{I^*}{N}p\mu^3 + \beta\frac{I^*}{N}\mu^4 + \beta\frac{I^*}{N}2\mu^2 p\sigma + \beta\frac{I^*}{N}2\mu^3\sigma + \beta\frac{I^*}{N}\mu^3\gamma + \beta\frac{I^*}{N}p\sigma^2\mu + \beta\frac{I^*}{N}\mu^2\sigma^2 + \beta\frac{I^*}{N}\sigma\mu\gamma p + \beta\frac{I^*}{N}\sigma\mu^2\gamma + 2\mu^3 p\sigma + 2\mu^4\sigma + \mu^3\gamma p + \mu^4\gamma + \sigma^2 p\mu^2 + \sigma^2\mu^3 + \sigma\gamma p\mu^2 + \sigma\gamma\mu^3 = 0$$

Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0)

Tingkat penyebaran suatu penyakit menular dalam suatu wilayah dapat ditunjukkan oleh nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar dari penyakit campak diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Diberikan persamaan polinomial orde lima:

$$\lambda^5 + (p+5\mu+2\sigma+\gamma)\lambda^4\left(11\mu^2+\sigma^2+2\mu p+8\mu\sigma+p\gamma+2\gamma\mu+\sigma\gamma+2p\mu+2\gamma\right)$$

$$\lambda^3 + \left(10\mu^3+5\mu^2+p\sigma^2+3\sigma^2\mu+6\mu\sigma p+2\mu^2\sigma p+3\mu\gamma p+6\mu^2\gamma+p\sigma\gamma+3\sigma\gamma\mu+10\mu^2\sigma+\mu^2 p\right)$$

$$\lambda^2 + \left(3\mu^4+\mu\sigma^2+2\mu^3 p+2\mu^2\sigma p+4\mu^3\sigma+\mu^2 p\gamma+2\gamma\mu^3+\sigma\gamma\mu^3\right)$$

$$\lambda + \mu^5+\mu^4 p+p\sigma^2\mu^2+\sigma^2\mu^3+2\mu^3\sigma p+2\mu^4\sigma+\gamma\mu^3 p+\mu^4\gamma+p\gamma\mu^2\sigma+\sigma\gamma\mu^3=0$$

nilai reproduksi dasar dari persamaan di atas diperoleh dari bagian konstannya, sehingga diperoleh :

$$\mu^5+\mu^4 p+p\sigma^2\mu^2+\sigma^2\mu^3+2\mu^3\sigma p+2\mu^4\sigma+\gamma\mu^3 p+\mu^4\gamma+p\gamma\mu^2\sigma+\sigma\gamma\mu^3=0$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menyamakan bagian positif dan negatifnya, maka diperoleh:

$$\mu^5 + \mu^4 p + \mu^4\gamma + \mu^4\sigma + \mu^3 p\gamma + \mu^3 p\sigma = -(\mu^4\sigma+\mu^3 p\sigma+\mu^3\sigma^2+\mu^3\gamma\sigma+p\sigma^2+\mu^2 p\gamma\sigma)$$

$$\mu^3(\mu^2 + \mu p + \mu\gamma + \mu\sigma + p\gamma + p\sigma) = -\mu^2\sigma(\mu^2 + \mu p + \mu\sigma + \mu\gamma + p\sigma + p\gamma)$$

$$= \frac{-\mu^2\sigma(\mu^2 + \mu p + \mu\sigma + \mu\gamma + p\sigma + p\gamma)}{\mu^3(\mu^2 + \mu p + \mu\gamma + \mu\sigma + p\gamma + p\sigma)}$$
$$= \frac{-\mu^2\sigma}{\mu^3}$$
$$= \frac{-\sigma}{\mu}$$

Agar penyakit dapat dihilangkan, maka haruslah $R_0 < 1. R_0 < 1$ terjadi apabila $-\sigma < \mu$ yang menunjukkan bahwa tidak terjadi penyebaran penyakit pada populasi dan $R_0 > 1$ terjadi apabila $-\sigma > \mu$ yang menunjukkan penyakit akan sulit untuk dihilangkan atau dengan kata lain penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Simulasi Model

Data simulasi dalam penelitian ini diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Parepare. Populasi di Kota Parepare berjumlah 138.699 orang, jumlah yang terkena penyakit campak enam orang dan jumlah kematian karena penyakit campak satu orang. Rata-rata periode laten 12 hari, rata-rata durasi infeksi 9 hari, angka reproduksi nyata R_* adalah 1 (setiap *infected* rata-rata akan menginfeksi 1 *susceptible*).

Estimasi Parameter Model

Parameter-parameter model dapat diestimasi sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 1.

TABEL 1. Data Nilai Kelas SEIRV dengan Asumsi Tertentu

No.	Nama Kelas	Jumlah Populasi awal	Jumlah Populasi Awal dalam Persen
1.	Populasi Kelas Rentan (S)	1.873 Jiwa	0,01345
2.	Populasi Kelas Terdeteksi (E)	79 Jiwa	$5{,}696 \times 10^{-4}$
3.	Populasi Kelas Infeksi (I)	6 Jiwa	$4{,}325 \times 10^{-5}$
4.	Populasi Kelas Sembuh (R)	5 Jiwa	$3{,}604 \times 10^{-5}$
5.	Populasi Kelas Vaksinasi (V)	5 Jiwa	$3{,}604 \times 10^{-5}$

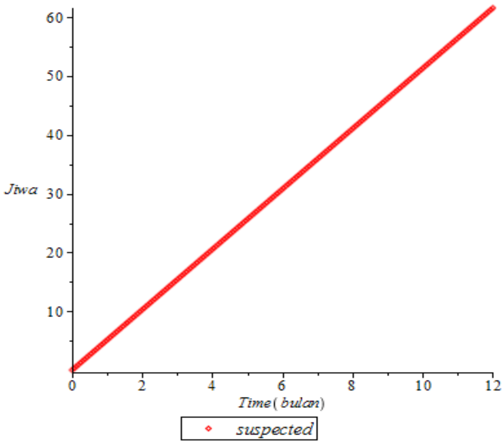
Data awal kelas SEIRV diperoleh dari data Dinas Kesehatan dan Badan Pusat Statistik Kota Parepare pada tahun 2015. Populasi kelas rentan diperoleh dari jumlah kelahiran, populasi kelas infeksi diperoleh dari jumlah penderita campak, total populasi diperoleh dari jumlah populasi di Kota Parepare pada tahun 2015. Selanjutnya untuk populasi kelas terdeteksi diperoleh dari jumlah yang terdeteksi penyakit campak, kemudian kelas sembuh diperoleh dari jumlah penderita yang telah sembuh dan kelas vaksinasi diperoleh dari jumlah populasi yang sembuh.

Parameter-parameter model (angka transisi per satuan waktu (hari) dihitung menggunakan rumus-rumus estimasi parameter model dan diperoleh :

1. Angka infektivitas $(\sigma) = \frac{1}{12} = 0.0833/\text{hari}$
2. Angka kesembuhan $(\gamma) = \frac{1}{9} = 0.1111/\text{hari}$
3. Angka kelahiran $(b) = \frac{1.873}{138.699 \times 365}$
   $= \frac{1.873}{50.625.135}$
   $= 3{,}699 \times 10^{-4}$

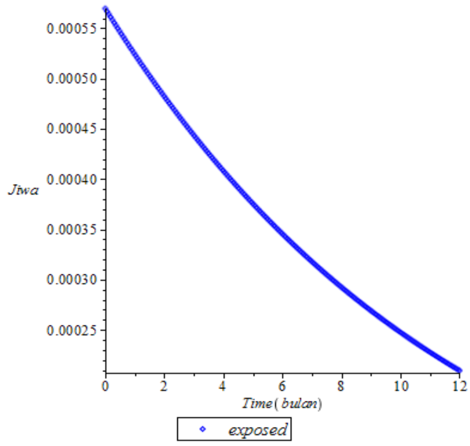
4. Angka kematian $(\mu) = \frac{1.873}{138.699 \times 365}$
$= \frac{1.873}{50.625.135}$
$= 3{,}699 \times 10^{-4}$
5. Angka kematian karena penyakit campak Angka kelahiran $(\delta) = 1$
6. Angka kontak $(\beta) = \frac{1}{9} = 0{,}1111$
7. Angka infeksi $\left(\frac{\beta I}{N}\right) = 0{,}1111$

Simulasi Komputer Model SEIRV



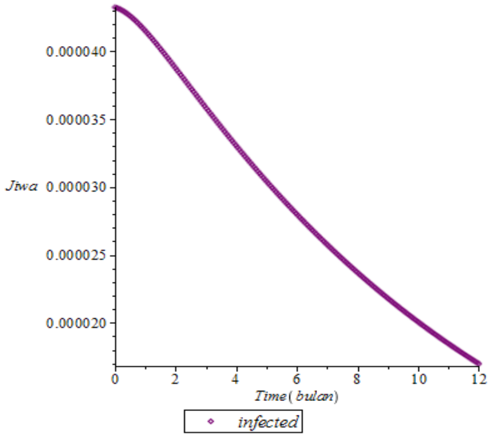
GAMBAR 3. Proporsi Individu *Susceptible*

Gambar 3 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu meskipun terlihat tetapi sebenarnya tidak linear. Setiap individu yang sehat namun rentan penyakit masuk ke dalam subpopulasi *susceptible*, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terdeteksi penyakit.



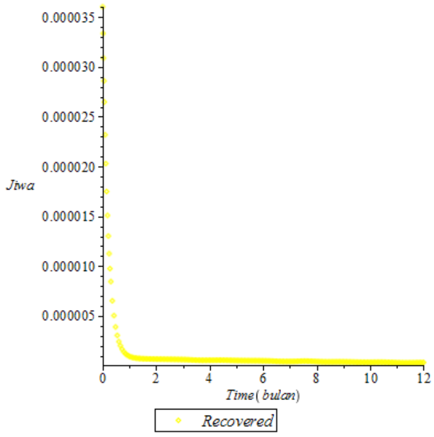
GAMBAR 4. Proporsi Individu *Exposed*

Pada Gambar 4 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terdeteksi setiap bulannya semakin menurun secara perlahan. Maka setiap individu yang terdeteksi penyakit masuk ke dalam subpopulasi *exposed*, individu pada sobpopulasi ini akan terdeteksi terhadap penyakit dan memiliki peluang untuk terinfeksi penyakit.



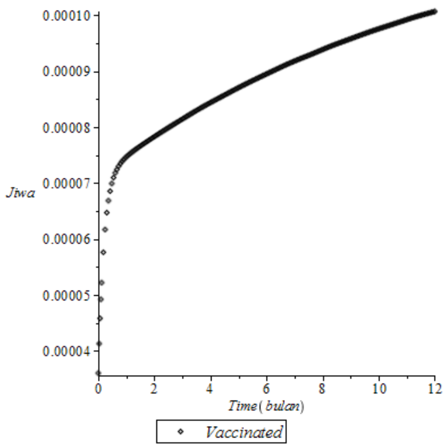
GAMBAR 5. Proporsi Individu *Infected*

Gambar 5 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi pada bulan pertama menurun secara drastis, dikarenakan jumlah populasi terinfeksi yang sudah ada sebelumnya waktu jumlahnya menurun secara perlahan. Maka setiap individu yang terinfeksi penyakit akan masuk ke dalam subpopulasi *infected*.



GAMBAR 6. Proporsi Recovered

Gambar 6 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh setiap bulannya sama saja. Tidak memiliki peningkatan yang signifikan dikarenakan jumlah yang terinfeksi sedikit. Setiap individu yang telah sembuh dari penyakit masuk ke dalam subpopulasi *recovered*, individu pada subpopulasi ini akan kebal terhadap penyakit.



GAMBAR 7. Proporsi *vaccinated*

Pada gambar 7 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh dan melakukan vaksinasi di tiap bulannya dengan berjalannya waktu meskipun terlihat linear tetapi sebenarnya tidak linear ke dalam subpopulasi *vaccinated*, individu dalam subpopulasi ini akan diberikan kekebalan terhadap penyakit campak.

KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Adapun bentuk model matematika SEIRV untuk penyakit campak sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta S\frac{I}{N} - \mu S$$
$$\frac{dE}{dt} = \beta S\frac{I}{N} - \sigma E - \mu E$$
$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I - (\mu + \delta)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \rho R - \mu R$$
$$\frac{dV}{dt} = \rho R - \mu V$$

2. Analisis model SEIRV untuk penyakit campak tersebut mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu :

   Tititk kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{bN}{\mu}, 0,0, \frac{1}{(p-\mu)R}, \frac{pR}{\mu}\right), \text{ dan}$$

Titik kesetimbangan endemik

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*, V^*) dengan$$
$$S^* = \frac{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)N}{\sigma\beta}$$
$$E^* = \frac{b\gamma\beta - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)N}{\sigma^2 + \mu}$$
$$I^* = \frac{\big(b\gamma\beta - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)\big)N}{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)}$$
$$R^* = \frac{b\gamma\beta - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)\gamma N}{p\mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)}$$
$$V^* = p\left(\frac{b\gamma\beta - \mu(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)\gamma N}{p\mu^2(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \delta)}\right)$$

3. Simulasi model matematika SEIRV penyakit campak menggunakan MAPLE, diperoleh bilangan reproduksi daras $(R_0) = \frac{-\sigma}{\mu} = -2{,}251959989$, ini berarti seseorang yang terinfeksi tidak menyebabkan oranglain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain tidak terjadi wabah pada populasi tersebut. Karena $R_0 < 1$ maka diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit yaitu :

$$E_0 = (S, E, I, R, V)$$
$$= \left(\frac{bN}{\mu}, 0,0, \frac{1}{(p-\mu)R}, \frac{pR}{\mu}\right)$$

DAFTAR PUSTAKA

Marfianti. (2015). *Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Campak di Kota Makassar*. Skripsi. Universitas Negeri Makassar: Makassar.

Olsder, G.J. (1994). *Mathematical System Theory*. Deflt Univercity of Technology: Belanda.

Bender,E.A. (1978). *An Introduction to Mathematical Modelling. USA.*

Kartono. (2001). *Maple untuk Persamaan Diferensial.* Yogyakarta : J&J Learning.

Perko, Lawrence. (1991). *Differential Equations and Dynamical System.* New York.

Oss,S.L. (1984). *Differensial Equations.* Singapore.

Maesaroh, U. (2013). *Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi*. (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga: Yogyakarta.

Howard, Anton. (2000). *Dasar-dasar Aljabar Linear.* Batam:Interaksara.