Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 189 – 199)
Vol. 2. No. 2, Oktober 2019
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Konsep Himpunan Fuzzy pada Paradoks Russel

Muhammad Abdy[1, a)], Awi Dassa[1], dan Sri Julia Nensi.[1, b)]

[1]*Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar, 90224*

[a)]Muh.abdy@unm.ac.id
[b)]srijulianensi88@gmail.com

Abstrak. *Himpunan fuzzy menggunakan dasar logika fuzzy untuk menyatakan suatu objek menjadi anggota dengan derajat keanggotaan (μ), tetapi Logika fuzzy melanggar hukum logika biner sehingga muncul anggapan bahwa logika fuzzy memiliki masalah yang sama dengan paradoks. Tetapi nilai kebenarana logika fuzzy tergantung dari derajat keanggotaan yang dimilikinya sehingga dapat ditarik sebuah kesimpulan dari besar darajat keanggotaan tersebut, sedangkan paradoks nilai kebenarannya tidak dapat ditarik kesimpulan apapun. Paradoks merupakan bentuk kritik landasan yang bertujuan untuk mengungkapkan dan menentukan inkonsistensi atau kontradiksi yang dihasilkan dari beberapa eksperimen mental dalam matematika, salah satu paradoks yang terkenal dalam kritik landasan teori himpunan adalah paradok Russel* $A = \{X|X \notin X\}$. *Pemecahan paradoks Russel dengan menggunakan konsep teori himpunan fuzzy diperoleh derajat keanggotaan* $A \in A$ *adalah 0.5 merupakan pernyataan setengah benar (half true) dan* $A \notin A$ *adalah 0.5 jugan merupakan pernyataan setengah benar (half true).*
Kata kunci*: Logika fuzzy, himpunan fuzzy, paradoks, paradoks Russel.*

Abstract. Fuzzy sets use the basis of fuzzy logic to declare an object to be a member with the degree of membership (μ), but fuzzy logic violates the law of binary logic so that the assumption arises that fuzzy logic has the same problem with paradox. But the true value of fuzzy logic depends on the degree of membership it has so that a conclusion can be drawn from the large membership ranks, while the paradox of its value cannot be drawn any conclusions. The paradox is a form of ground criticism that aims to express and determine the inconsistencies or contradictions that result from several mental experiments in mathematics, one of the paradoxes that is well-known in critics of set theory is Russel's paradox $A = \{X|X \notin X\}$. The paradoxical solution of Russell by using fuzzy set theory concepts is that the degree of $A \in A$ membership is 0.5 and $A \notin A$ is 0.5.
Keywords: *Fuzzy Logic, fuzzy set, paradox, Russel paradox.*

PENDAHULIAN

Fuzzy dairtikan sebagai kabur atau samar-samar, pada pertengahan tahun 1965 konsep fuzzy mulai diterapkan dalam bidang ilmu pengetahuan, seorang matematikawan Iran bernama Lotfi.A. Zadeh (1921-2017) memperkenalkan Teori Himpunan fuzzy atau Himpunan kabur. Teori Himpunan fuzzy menggunakan dasar konsep Logika fuzzy untuk menyatakan keanggotaanya, dimana Logika fuzzy merupakan logika yang memiliki nilai kekaburan antara benar dan salah, namun besar kebenaran dan kesalahannya tergantung pada derajat keanggotaan (Kusum, 2010).

Paradoks ialah suatu pernyataan atau proposisi yang menyatakan pemikiran dari premis yang dapat diterima, berujung pada kesimpulan yang terlihat tidak logis atau kontradiksi dengan dirinya sendiri (Gautama, 2013). Salah satu paradoks dalam matematika adalah paradoks Russel, dalam paradoks tersebut Russel mendefenisikan suatu himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan yang tidak mengandung dirinya sendiri sebagai anggota.

$A = \{X | X \notin X\}$

Penelitian ini mengkaji tentang epistimologi logika fuzzy dan paradoks, serta menerapan Logika fuzzy pada Himpuna fuzzy dalam menyelesaikan permasalahan paradoks. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh derajat keanggotaan paradoks Russel dengan mengaplikasikan konsep dasar Himpunan fuzzy.

Beberapa penelitian telah mengkaji permasalahan mengenai logika fuzzy dan paradoks (Elkan, 1993; Kahagia, 2013; Kartsiotis, 2013). Elkan (1993) mengkaji tentang konsep logika fuzzy yang dianggap sebagai sebuah paradoks, dan menghasilkan anggapan bahwa logika fuzzy runtuh secara matematis karena memiliki dua nilai kebenaran. Kahagia & Kartsiotis (2013) menyelesaikan paradoks pembohong dengan operasi logika fuzzy untuk menemukan nilai derajat keanggotaan atau nilai kebenaran dari proposisi paradoks pembohong.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian murni, dimana metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji sumber pustaka atau literatur-literatur yang berkaitan dengan Himpunan fuzzy, Logika fuzzy dan juga mengenai paradoks Russel. Penelitian ini mengkaji tentang paradoks dalam matematika, hubungan paradoks dan logika fuzzy, serta fuzzyfikasi paradoks Russel.

Dalam fuzzyfikasi paradoks Russel atau mencari derajat keanggotaan paradoks Russel, dimisalkan suatu himpunan fuzzy $\breve{A}$ yaitu “Kemungkinan himpunan memuat dirinya sendiri”, kemudian digunakan operasi logika fuzzy untuk mencari derajat keanggotaan dari himpunan fuzzy $\breve{A}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matematika dipandang sebagai ilmu pasti yang hanya memiliki nilai benar dan salah, mulai diragukan karena kehadiran paradoks. Akan tetapi Teori logika fuzzy hadir sebagai cabang baru dalam matematika memiliki lebih dari satu nilai kebenaran, sehingga bertentangan dengan hukum dasar Logika biner, hal tersebut membuat logika fuzzy memiliki kesamaan dengan paradoks. Hukum dasar logika biner terdiri dari:

1. Hukum identitas menyebutkan bahwa sesuatu adalah sama dengan dirinya sendiri atau $A = A$.
2. Hukum kontradiksi adalah hukum yang menyakan bahwa sesuatu pada waktu yang sama tidak dapat sekaligus memiliki suatu sifat dan juga tidak memiliki suatu sifat tersebut atau $A \neq non\ A$
3. Hukum ketiadaan jalan tengah atau kemungkinan ketiga merupakan kelanjutan dari hukum identitas dan hukum kotradiksi yang memberikan landasan konsistensi dalam berfikir. Hukum ini menyatakan bahwa sesuatu itu pasti memiliki sifat tertentu dan tidak ada kemungkinan ketiga, prinsip ketiga ini tidak memberikan pilihan selain hitam atau putih, artinya tidak ada tempat bagi campuran keduanya.

4. Hukum cukup alasan menjelaskan bahwa jika terjadi perubahan terhadap sesuatu, perubahan itu harus berlandaskan alasan yang cukup memadai dan cukup dapat bertanggung jawab secara rasional.

Paradoks dalam Matematika

Pondasi matematika dibangun oleh Teori himpunan (Prabowo, 2009). Teori himpunan pertamakali diperkenalkan oleh George Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918), konsep himpunan Cantor tersebut banyak digunakan dalam menyelidiki pendefenisisan dasar-dasar matematika. Pada tahun 1897 seorang matematikawan Italia bernama Burali Forti mengeluarkan suatu kritik terhadap landasan matematika, dengan mengemukakan hal kontradiksi di rangkaian teori himpunan (Paul, 2004).

Pada tahun 1902 Bertrand Russel juga menemukan masalah dalam teori cantor tersebut, dan menimbulkan sebuah paradoks (Paul, 2004). Bertrand Russel mengemukakan paradoks yang sangat berpengaruh terhadap perkembangan matematika, Russel mendefinisikan suatu himpunan yang syarat anggotanya merupakan himpunan tidak memuat dirinya sebagai anggota. Sebelum memahami paradoks Russel, terlebih dahulu perlu diperhatikan definisi anggota himpunan.

Definisi 1

Misal $\phi(x)$ adalah syarat, $\{x|\phi(x)\}$ adalah himpunan semua x dengan $\phi(x)$

Lemma 1

Misalkan $\phi(x)$ adalah syarat sehingga $A = \{x|\phi(x)\}$ ada, maka $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow \phi(x)$

Bukti:

Jika $\phi(x)$ adalah syarat sedemikian sehinga $A = \{x|\phi(x)\}$ ada. Misal x di semesta pembicaraan, akan dibuktikan dengan dua arah.

(i) $\Rightarrow$ Asumsikan $x \in A$, dan A ada maka x memenuhi syarat ϕ yaitu $\phi(x)$. sehingga jika $x \in A \Rightarrow \phi(x)$

(ii) $\Leftarrow$ Asumsikan $\phi(x)$ yaitu x memenuhi syarat. Karena x memenuhi syarat maka $x \in A$. Sehingga jika $\phi(x) \Rightarrow x \in A$

jadi dari (i) dan (ii) maka $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow \phi(x)$ terbukti.

Teorema Paradoks Russel (Michael Potter, 2004)

$$A = \{X \mid X \notin X\}$$

A memuat semua himpunan yang tidak memuat dirinya sendiri sebagai anggota, karena *A* adalah himpunan maka *A* dapat memuat dirinya sebagai anggota atau tidak, tetapi Russel mengatakan bahwa keduanya tidak mungkin terjadi.

Bukti:

Berdasarkan lemma 1 dimana $X \notin X$ adalah syarat sehingga $A = \{X|X \notin X\}$ ada, maka

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$$

(1)

pernyataan (1) merupakan pernyataan yang kontradiksi.

Teori himpunan Cantor tidak memberikan aturan khusus dalam menetapkan anggota himpunan yang terdefinisi, sehingga ada kemungkinan himpunan memuat dirinya sendiri sebagai anggota, seperti himpunan yang memuat himpunan sebagai anggota pada contoh berikut:

$Z = \{X, Y, Z\}$

Pada paradoks Russel, A merupakan himpunan yang memuat semua yang tidak memuat dirinya sendiri

$$A = \{X \mid X \notin X\}$$

Misalnya:

$B = \{c, d, e, f\}$

$C = \{B, D, E, F\}$

sehingga B dan C merupakan anggota di A.

$A = \{B, C\}$

Karena A adalah himpunan yang memuat semua himpunan sebagai anggota, dan A juga adalah sebuah himpunan maka A juga anggota di A.

$A = \{A, B, C\}$

Akan tetapi jika A memuat dirinya sendiri sebagai anggota, maka A tidak memenuhi syarat keanggotaan yaitu "Himpunan yang tidak memuat dirinya sendiri sebagai anggota". Jadi A harus dikeluarkan dari himpunan A.

$A = \{B, C\}$

Himpunan A sudah tidak memuat dirinya sendiri sebagai anggota, akan tetapi hal tersebut justru menjadikan A memenuhi syarat keanggotaan di A. Jadi A merupakan anggota A, dengan demikian akan kembali ke permasalahan yang pertama dan tidak akan menemui kesimpulan.

Sejak Russel menemukan paradoks atau hal kontradiksi dalam Teori himpunan Cantor, kebenaran landasan matematika mulai diragukan, akibatnya berbagai paradoks muncul sebagai bentuk kritik terhadap landasan matematika,

Agar dapat menyelesaikan dan mencegah munculnya paradoks, maka dari itu para matematikawan berusaha mencari landasan yang kokoh untuk menetapkan kepastian yang mutlak tentang kebenaran matematika. Dari usaha tersebut muncul perbedaan paham diantara para filsuf, yaitu paham logistis, formalis, dan intuisionis.

1. Logisme
   Aliran logisme memiliki konsep bahwa seluruh matematika dapat diekspresikan ke dalam istilah-istilah logika secara murni dan dapat dibuktikan menggunakan prinsip-prinsip logika. Tugas logisme adalah menyediakan dasar logika untuk pengetahuan matematika secara pasti dan meyakinkan serta mengukuhkan kembali kemutlakan kepastian matematika (Prabowo, 2009). Dapat disimpulkan bahwa aliran filsafat logisme menetapkan logika sebagai landasan matematika, dengan konsep dan objek serta teorema matematika diperoleh dari prinsip-prinsip logika.
2. Formalisme
   Formalisme mengklaim esensi matematika merupakan manipulasi karakter-karakter, dan permainan yang dimainkan dengan formal di atas kertas mengikuti aturan (Paul, 2004). Menurut aliran formalisme matematika adalah karakter typografys dan aturan-aturan yang memanipulasi karakter-karakter itu.
3. Intuisionis
   Aliran intisionis menganggap bahwa matematika terdiri atas konstruksi dan aktifitas mental,

menurut aliran ini bilangan ibarat karakter dalam dongeng cerita, hanyalah entitas mental, yang tidak akan pernah ada, kecuali dalam pikiran manusia (Prabowo, 2009). Sehingga aliran intuisionis menganggap keberadaan objek matematika itu tidak ada.

Filsafat logistis, formalis, maupun intuisionis saling membuktikan kebenaran landasan matematika dari dasar yang telah diasumsikan masing-masing aliran, tetapi ketiga filsuf tersebut gagal (Paul, 2004). Karena para filsuf belum mampu mempertahankan keabsolutan landasan matematika, maka para matematikawan berlomba-lomba mencari jalan keluar paradoks.

Usaha para matematikakwan dalam mencari jalan keluar dari banyaknya paradoks yang muncul, membuahkan hasil dengan tercipta penemuan-penemuan baru dalam dunia matematika. Salah satu contoh adalah paradoks Zeno *"Achilles dan kura-kurai*", yang terpecahkan dengan teori deret tak hingga, oleh Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Penemuan baru dalam matematika yang didasari oleh paradoks, tidak lepas dari peran Zeno yang menemukan metode berargumen paradoks, yaitu metode berargumen dengan cara menunjukkan sifat kotradiktif dari argumen lawan (Yuana, 2010). Zeno memiliki banyak paradoks sebagai bentuk kritik terhadap landasan matematika, karena paradoks yang dikemukakan oleh Zeno berdampak pada perkembangan ilmu logika dan matematika, maka dari itu Bernat Russel beranggapan bahwa Zeno adalah peletak dasar logika modern (Yuana, 2010).

Hubungan Paradoks dan Logika Fuzzy

Logika fuzzy dan paradoks memiliki kesamaan yaitu tidak sejalan dengan prinsip-prinsip logika biner Ariestoteles, yang berdasarkan pada hukum identitas, hukum kontradiksi dan hukum ketiadaan jalan tengah (Haryono, 2014). Menurut Elkan (1993), logika fuzzy runtuh secara matematika karena memiliki dua nilai kebenaran. Padahal logika fuzzy merupakan cabang dari matematika sedangkan dilain pihak paradoks yang merupakan penyebab kebenaran landasan matematika diragukan juga memiliki dua nilai kebenaran.

Matematika berlandaskan pada logika biner, dimana logika biner merupakan dasar pemikiran ilmiah, Jika sesuatu terbukti benar secara logis maka itu dianggap benar secara ilmiah (Johson, 2002). Landasan logika fuzzy adalah pola pemikiran manusia yang tidak pasti, sedangkan logika biner berlandaskan pada dua nilai kebenaran *benar* dan *salah* yang terkadang kurang lengkap untuk menyatakan logika berpikir manusia. Maka dari itu kemunculan logika fuzzy mengalami banyak pertentangan khususnya di dunia Barat, karena dunia bagian Barat menganut logika biner. Pemikiran fuzzy menentang pemikiran logis ilmiah, dianggap mengancam sains modern dan ide matematika.

Ada tiga kritik utama yang menentang dan menolak logika fuzzy:

1. Penerapan logika fuzzy
2. Logika fuzzy menggunakan angka antara 0 sampai 1 untuk menggambarkan derajat fuzzy dan pakar probabilis menganggap melakukan hal yang sama
3. Pernyataan *A= bukan A* benar di logika fuzzy

Berikut dijabarkan mengenai penjelasan jawaban dari kritik penolakan tersebut:

1. Penerapan logika fuzzy

Ilmuan di Amerika Serikat menolak logika fuzzy karena menganggap tidak memiliki dasar ilmiah, tapi di Eropa dan di Jepang teori logika fuzzy diterima dengan antusias dan diaplikasikan dalam dunia elektronik dan industri. Sehingga teori logika fuzzy berkembang sangat pesat dalam 25 tahun terakhir sejak akhir pada tahun 1980 (Betty, 2002). Pada tahun 1980 Jepang memiliki lebih dari 100 perangkat yang menggunakan logika fuzzy diantaranya sistem pengolahan air dan sistem kereta bawah tanah (Kosko, 1993). Hal tersebut membuktikan bahwa seiring berjalanya waktu Teori logika Fuzzy dapat diterapkan dalam berbagai bidang.

2. Logika fuzzy menggunakan angka antara 0 sampai 1 untuk menggambarkan derajat fuzzy dan pakar probabilis menganggap melakukan hal yang sama

Logika fuzzy dan teori probabilitas memiliki kesamaan karena menangani ketidakpastian dan mencakup tentang nilai kebenaran pada selang tertutup [0,1], akan tetapi logika fuzzy menangani ketidakpastian dalam hal tingkat kebenaran terhadap suatu hal yang tidak dapat didefinisikan dengan jelas dan mengandung unsur ambiguitas, sedangkan teori probabilitas menangani ketidakpastian dalam hal ketidaktentuan dan kemungkinan, sebagai contoh:

- Probabilitas air dalam gelas beracun adalah 0,2 maka kemungkinan air tersebut tidak beracun
- Air dalam gelas beracun memiliki nilai kebenaran 0,2 maka air tersebut sudah pasti beracun

3. Pernyataan *A*= *bukan A* benar di logika fuzzy

Pada kritik yang ketiga ini logika fuzzy memiliki kesamaan dengan paradoks karena memiliki dua nilai kebenaran sekaligus, sehingga keduanya bertentangan dengan logika biner. Logika fuzzy dan logika biner tidak searah hal tersebut dikatakan oleh Zadeh dalam wawancara yang dilakukan oleh Blair Betty pada tahun 1994, Zadeh berkata *"pada tradisi Aristoteles orang-orang berusaha setepat mungkin mengambil keputusan dengan mempersepsikan segala sesuatu dengan hitam atau putih (Absolut) sedangkan logika fuzzy melakukan hal yang sebaliknya",* maksud dari pernyataan Zadeh tersebut adalah jika terdapat pilihan *benar* dan *salah*, maka dengan hukum logika biner Aristoteles selain *benar* dan *salah* tidak ada pilihan lain, sedangkan dengan logika fuzzy ada kemungkinan lain selain *benar* dan *salah* yaitu bisa jadi cukup benar , sangat benar, cukup salah, dan sangat salah.

T = {benar, sangat benar, cukup benar, ……, sangat salah, salah}

Tingkatan di T didefinisikan sebagai "nilai kebenaran fuzzy" dan diperoleh dengan fungsi keanggotaan. Salah satu fungsi keanggotaan adalah fungsi keanggotaan Baldwin $\mu_{benar}(v)$:

$$\mu_{benar}(v) = v \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{sangatbenar}(v) = (\mu_{benar}(v))^2 \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{cukupbenar}(v) = (\mu_{benar}(v))^{1/2} \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{Salah}(v) = 1 - \mu_{benar}(v) \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{sangatsalah}(v) = (\mu_{salah}(v))^2 \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{cukupsalah}(v) = (\mu_{salah}(v))^{1/2} \qquad v \in [0,1]$$

Sebagai contoh pertimbangkan predikat P berikut:

P = "20 tahun adalah umur muda"

Misalka:

P1= "20 masih muda adalah benar"

P2= "20 masih muda adalah cukup benar"

P3= "20 masih muda adalah sangat benar"

P4= "20 masih muda adalah salah"

Misalkan derajat keanggotaan 20 dalam “Muda” adalah 0,9. oleh karena itu nilai kebenaran P adalah 0.9, dengan fungsi keanggotaan Baldwin maka diperoleh

$\mu_{benar}(20) = 0.9$

$\mu_{cukupbenar}(20) = (\mu_{benar}(20))^{1/2} = 0.95$

$\mu_{Sangatbenar}(20) = (\mu_{benar}(20))^{2} = 0.81$

$\mu_{Salah}(20) = 1 - \mu_{benar}(20) = 0.1$

Sehingga nilai kebenaran untuk P2, P3, P4 diperoleh :

Untuk P1= 0.9

Untuk P2= 0.95

Untuk P3= 0.81

Untuk P4= 0.1

Umur 20 tahun merupakan kategori muda adalah pernyataan benar dengan derajat kebenaran 0.9, sangat benar dengan derajat kebenaran 0.95, cukup benar dengan derajat kebenaran 0.81 dan 20 tahun merupakan kategori muda adalah pernyataan salah dengan derajat kebenaran 0.1.

Dari pertimbangan predikat P dapat dilihat bahwa nilai kebenaran logika fuzzy, baik itu nilai *benar* atau *salah* ada besaran yang mewakilinya, angka yang disebut sebagai derajat kebenaran atau derajat keanggotaan, nilai kebenarannya mendekati *benar* dan nilai kebenarannya mendekati *salah* tergantung dari derajat kebenaran yang dimilikinya.

Teori Logika Fuzzy memiliki fleksibilitas yang digunakan untuk menyatakan nilai kebenaran atau nilai keanggotaan, nilai kebenaran menunjukkan suatu item tidak hanya bernilai *benar* atau *salah* dengan nilai 0 menunjukkan *salah* dan nilai 1 menunjukkan *benar* tetapi masih ada nilai-nilai yang terletak antara *benar* atau *salah*, semakin mendekati 0 maka akan mendekati nilai kebenaran *salah*, dan semakin mendekati 1 maka nilai kebenaranya mendekati *benar*, sedangkan nilai kebenaran 0.5 berarti pernyataan itu setengah *benar* (*half true*). Paradoks dinamakan antinomi karena memiliki dua nilai kebenaran sekaligus. Nilai kebenaran paradoks baik itu nilai *benar* dan *salah* berada pada posisi yang sama, atau nilai kebenaran paradoks berada pada posisi tegas bernilai *benar* sekaligus *salah* sehingga tidak dapat ditarik kesimpulan.

Sehingga dari nilai kebenaran Logika fuzzy maka Logika fuzzy tidak sama dengan paradoks karena Logika fuzzy mengimplementasikan ketidakpastian ke dalam angka 0 sampai 1 sebagai tolak ukur kebenaran atau derajat keanggotaa, sedangkan paradoks tidak memiliki hal tersebut.

Fuzzifikasi paradoks Russel

Himpunan fuzzy menggunakan dasar logika fuzzy untuk menyatakan suatu objek menjadi anggota dengan derajat keanggotaan (μ). Berikut penerapan konsep himpunan fuzzy pada paradoks Russel. Pada himpunan $A = \{X | X \notin X\}$ dengan fuzzifikasi derajat keanggotaan himpunan *A* memuat dirinya sebagai anggota.

Mencari derajat keanggotaan anggota himpunan fuzzy, maka proposisi yang digunakan juga menggunakan proposisi atau pernyataan logika fuzzy. Misalkan nilai kebenaran suatu pernyataan "p adalah v benar”, didefinisikan dalam pernyataan logika fuzzy, yang menyatakan bahwa pernyataan p memiliki nilai kebenaran v. Jika hal yang sama dengan q, yang juga adalah pernyataan dengan nilai kebenaran v, maka dapat dikatakan bahwa nilai kebenaran p sama dengan q.

$$\mu(p) = \mu(q) \tag{2}$$

Maka dari itu dapat membuat suatu pernyataan biimplikasi

$p \Leftrightarrow q$

Pernyataan p dengan nilai kebenaran v adalah pernyataan yang benar, dan q juga pernyataan dengan nilai kebenaran v, maka dalam hal ini dengan menggunakan biimplikasi untuk menyatakan nilai kesamaan antara p dan q (Grim, 1993) ditulis dengan bentuk:

p dengan $v \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

yang berarti:

$\mu(p \text{ dengan } v) = \mu(p \Leftrightarrow q)$

Dengan biimplikasi Lukasiewic maka diperoleh

$\mu(p \text{ dengan } v) = 1 - |\mu(p) - \mu(q)|$

Untuk lebih sederhana dapat ditulis

$$\mu(p \text{ dengan } v) = 1 - |\mu(p) - v| \tag{3}$$

Teorema Paradoks Russel $A = \{X | X \notin X\}$ menyatakan bahwa A tidak bisa menjadi anggota dirinya sendiri, dan juga tidak bisa tidak menjadi anggota dirinya sendiri. Maka dari itu dengan menggunakan konsep himpunan fuzzy, maka dapat diketahui nilai derajat keanggotaan A memuat dirinya sendiri sebagai anggota atau tidak.

Misalkan Himpunan semesta $U = \{(A \in A), (A \notin A)\}$, dan himpunan fuzzy $\hat{A}$ menyatakan "Kemungkinan himpunan *A* memuat dirinya sendiri".

Akan dicari derajat keanggotaan $A \in A$ dan $A \notin A$.

Penyelesaian:

(i). A tidak memuat dirinya sendiri maka $\mu_A(A) = 0$

Misal:

$B = A \notin A$

dan

$x = (\mu_A(A) = 0)$

Sehingga $B = x$

$A \notin A = (\mu_A(A) = 0)$

Berarti nilai kebenaran B dan x sama

$\mu(B) = \mu(x)$

$$\mu(A \notin A) = \mu(\mu_A(A) = 0) \tag{4}$$

Maka dari itu berdasarkan (2) maka untuk diperoleh

$\mu(A \notin A) = \mu((A \notin A) \Leftrightarrow \mu_A(A) = 0)$

$\mu(A \notin A) = \mu((A \notin A) \Leftrightarrow 0)$

Dengan biimplikasi Lukasiewic maka:

$\mu(A \notin A) = 1 - |\mu(A \notin A) - 0|$

$\mu(A \notin A) = 1 - \mu(A \notin A)$

$\mu(A \notin A) = \frac{1}{2}$ (5)

sehingga diperoleh derajat keanggotaan himpunan A tidak memuat dirinya sebagai anggota adalah $\mu(A \notin A) = \frac{1}{2}$ atau $\mu(A \notin A) = 0.5$

Karena $\mu_A(A) = 0.5$ maka pernyataan A tidak memuat dirinya sebagai anggota merupakan penyataan setengah benar (*half true*).

(ii). *A* memuat dirinya sebagai anggota maka $\mu_A(A) = 1$

Misal :

$C = A \in A$

dan

$y = (\mu_A(A) = 1)$

Sehingga $y = C$

$A \in A = (\mu_A(A) = 1)$ (6)

(6) merupakan komplemen dari (4)

Dari (4) diperoleh $\mu(A \notin A) = 1 - \mu(A \notin A)$

Sehingga dengan operasi komplemen himpunan fuzzy diperoleh

$\mu(A \in A) = \mu(A \notin A)$

$\mu(A \in A) = \frac{1}{2}$ (7)

sehingga diperoleh derajat keanggotaan himpunan A tidak memuat dirinya sebagai anggota adalah $\mu(A \in A) = \frac{1}{2}$ atau $\mu(A \in A) = 0.5$

Karena $\mu(A \in A) = 0.5$ maka pernyataan A memuat dirinya sendiri sebagai anggota merupakan penyataan setengah benar (*half true*).

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh:

$\breve{A} = \{(A \in A, 0.5), (A \notin A, 0.5)\}$

Pada kasus (1) yaitu:

$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$

Syarat *A* memuat dirinya sendiri adalah *A* tidak memuat dirinya sendiri.

Misal:

$v = A \in A \Leftrightarrow A \notin A$

untuk mencari derajat kebenaran v maka digunakan derajat keanggotaan $A \in A$ yang diperoleh pada (5) adalah 0.5 , dan $A \notin A$ dengan derajat keanggotaan 0.5 pada (7). Sehingga untuk derajat kebenaran v dengan operasi biimplikasi logika fuzzy maka:

$v = 1 - |\mu_A(A) - \mu_A(A)|$

$v = 1 - |0.5 - 0.5|$

$v = 1$

keberadaan A sebagai anggota di dalam dirinya sendiri sekaligus menjadi bukan anggota dalam dirinya sendiri. Hal tersebut ditunjukkan dengan derajat kebenaran v adalah 1.

KESIMPULAN

Kemunculan paradoks dalam matematika diawali dengan kritis landasan matematika, yaitu dalam teori himpunan cantor, salah satu paradoks yang paling berpengaruh adalah paradoks yang dikemukakan oleh Russel, karena kemunculan paradoks Russel tersebut, maka berbagai paradoks kemudian bermunculan dan mengakibatkan para filsuf matematika berbeda pendapat dalam menetapkan landasan matematika, filsuf matematika terbagi dalam tiga kelompok yaitu Logisme, Formalisme, dan intusionisme.

Logika fuzzy dan paradoks sama-sama melanggar Hukum Ketiadaan Jalan Tengah karena memiliki dua nilai kebenaran sehingga melanggar hukum dasar logika ilmiah, akan tetapi nilai kebenaran logika fuzzy nilai *benar* dan *salah* ada besaran yang mewakilinya. Angka yang disebut sebagai derajat kebenaran atau derajat keanggotaan yang disimbolkan (μ), nilai kebenarannya mendekati *benar* dan nilai kebenarannya mendekati *salah* tergantung dari derajat kebenaran yang dimilikinya, sedangkan paradoks nilai *benar* dan *salah* berada pada posisi tegas sama, sehingga tidak ada pemisah antara *benar* dan *salah.*

Penerapan konsep himpunan fuzzy pada paradoks Ruzzel diperoleh himpunan A memuat dirinya sendiri dengan derajat keanggotaan 0.5 yang berarti memiliki nilai kebenaran fuzzy setengah benar (*half true*), dan himpunana A tidak memuat dirinya sendiri dengan derajat keanggotaan 0.5 juga memiliki derajat keanggotaan setengah benar (*half terue*), keberadaan A sebagai anggota di dalam dirinya sendiri sekaligus menjadi bukan anggota dalam dirinya sendiri. Hal tersebut ditunjukkan dengan derajat kebenaran $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$ adalah 1.

DAFTAR PUSTAKA

Blair, B. (1994). Interview with Lotfi Zadeh Azerbaijan International. *Azerbaijan*, 1994(2.4). 46-47, 50.

Elkan, C. (1993). The Paradoxical Success of Fuzzy Logic, *IEEE Expert*, 9(4). 3-49

Gautama, S, E. (2013). *Konsep Berpikir dari Sistematika Filsafat hingga logika Matematika.* Kalimantan selatan: Sahabat.com.

Grim, P. (1993). Self Reference and Chaos in Fuzzy Logic. *IEEE Transaction on Fuzzy Sistem.* 1(4). 237-253.

Haryono, D. (2014). *Filsafat Matematika.* Bandung: Alfabeta.

Kosko, B. (1993). *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic.* Hyperion: New York.

Kusum, S., & Purnomo, H. (2010). *Aplikai logika fuzzy untuk Pendukung Keputusan (Edisi 2)*. Yongyakarta: Graha Ilmu

Kahagia, A., dkk. (2013). On the Use of Fuzzy Logic and Learning Automata Optimization to Resolve the Liar and Related Paradoxes, *journal of intelligent & fuzzy system,* 24, 111-120.

Paul, E. (2004). *The Philosophy of Mathematics Education.* Taylor & Francis e-Library.

Johson, R. (2002). *Fuzzy logic and fuzzy logic sun tracking control*. Calvin College, Machigan.

Yuana, A, K. (2010). *The Greates Philossophers 100 Tokoh Filsuf Barat Abad 6 M-21M yang Menginspirasi Dunia Bisnis*. Yongyakarta: CV. Andi Offset.

Prabowo, A. (2009). *Aliran-Aliran Filsafat dalam Matematika.* Fakultas Sains dan Teknik. Universitas Jendral soedirman

Potter, M. (2004). *Set Theory and Its Philosophy*. New York: Oxford University Press