Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 91 – 97)
Vol. 5. No. 2, Oktober 2022
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Penyelesaian Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

Wahidah Sanusi[1,a)], Syafruddin Side[1,b)], Muhammad Isbar Pratama[1,c)], dan Fitriyani[1,d)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar*

[a)] wahidah.sanusi@unm.ac.id
[b)] isbarpratama@unm.ac.id
[c)] syafruddin@unm.ac.id
[d)] fitriyani260300@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini merupakan peneltian murni berupa kajian teori yang bertujuan untuk mengetahui penyelesaian persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit dan mengetahui simulasi persamaan panas dimensi satu. Metode beda hingga skema eksplisit adalah suatu metode alternatif yang digunakan untuk menyelesaiakan persamaan differensial parsial. Langkah pertama pada penelitian ini yaitu membangun dan menganalisis persamaaan panas dimensi satu. Selanjutnya mendiskritisasi persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan turunan numerik. Kemudian menyelesaikan persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan skema eksplisit. Terakhir, menggunakan program Matlab untuk melakukan simulasi penyelesaian persamaan panas dimensi satu. Hasil simulasi menunjukkan bahwa adanya perubahan suhu dari suhu yang tinggi ke suhu yang lebih rendah yang dipengaruhi oleh waktu karena adanya proses perpindahan panas.*
Kata Kunci: *Persamaan Panas, Metode Beda Hingga, Skema Eksplisit.*

Abstract. *This research is a pure research in the form of a theoretical study that aims to determine the solution of the one-dimensional heat equation using the finite difference method explicit scheme and to know the simulation of the one-dimensional heat equation. The explicit schema finite difference method is an alternative method used to solve partial differential equations. The first step in this research is to build and analyze the one-dimensional heat equation. Next, discretize the one-dimensional heat equation by using numerical derivatives. Then solve the one-dimensional heat equation using an explicit schema. Finally, using the Matlab program to simulate the solution of the one-dimensional heat equation. The simulation results show that there is a change in temperature from a high temperature to a lower temperature which is influenced by time due to the heat transfer process*
Keywords: *Heat Equation, Finite Difference Method, Explicit Schematic*

LATAR BELAKANG

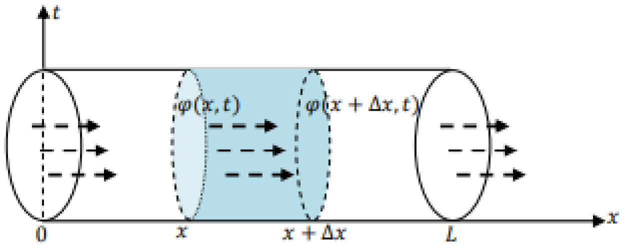
Persamaan diferensial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang hingga saat ini memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seperti halnya pemodelan matematika (Zaki dkk, 2019). Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan konsep persamaan differensial adalah distribusi atau perpindahan panas pada suatu bidang pengantar (Holman, 2010). Perpindahan panas dituliskan dalam suatu persamaan panas yang mampu menjelaskan permasalahan fisika berupa perambatan partikel dan energi (Maghfur and Kusumawati, 2017). Perpindahan panas adalah ilmu yang menjelaskan perpindahan energi yang terjadi karena adanya perbedaan suhu di antara benda atau material (Suparno, 2009). Proses perpindahan panas dapat dimodelkan secara matematika kedalam suatu bentuk persamaan panas (Caesar dkk, 2020). Persamaan panas memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari seperti sistem kerja perambatan panas pada kabel dan proses sterilisasi minuman kemasan.

Tidak semua persamaan differensial dapat diselesaikan secara analitik, hal itu dapat diatasi dengan menyelesaikan secara numerik (Andriani, 2005). Salah satu metode numerik untuk mencari solusi suatu persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga skema eksplisit. Metode beda hingga adalah suatu metode alternatif yang digunakan untuk mengontruksi persamaan diferensial yang kontinu ke bentuk beda hingga yang diskrit menggunakan Deret Taylor (Agustin, 2020). Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial kedalam bentuk beda hingga akan menjadi lebih mudah.

Penelitian terkait persamaan panas telah dilakukan oleh Rahayu, Waluya dan Wuryanto (2012) menganalisis dan memodelkan perpindahan panas pada mesin pengering padi dengan menggunakan metode Pemisahan Variabel. Kemudian Dita dan Widodo (2013) membahas karakteristik aliran panas pada logam penghantar listrik. Sedangkan Iin Luthfiyati (2018) menganalisis aliran debris yang telah dimodelkan kepersamaan diferensial parsial kemudian mencari solusi dari persamaan aliran debris tersebut menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Akan tetapi ketiga penelitian tersebut belum mengkaji solusi persamaan panas dengan metode beda hingga. Sehingga artikel ini akan membahas tentang analisis penyelesaiaan persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit.

HASIL DAN SIMULASI

Persamaan panas dapat diperoleh dengan merumuskan persamaan aliran panas.



GAMBAR 1. Ilustrasi Aliran Panas dalam Suatu Ruang

Misalkan kawat penampang A berorientasi ke arah x yaitu $x = 0$ sampai $x = L$ yang ilustrasikan pada Gambar 1 dan jumlah energi panas per satuan volume yang tidak diketahui variabelnya disebut kepadatan energi panas. A merupakan luas penampang, $\varphi(x,t)$ merupakan besarnya energi panas per satuan luas penampang yang lewat di penampang kawat pada posisi x pada waktu t. Asumsikan bahwa pada setiap waktu t, suhu di dalam suatu penampang kawat pada posisi x selalu sama yaitu $u(x,t)$ tetapi berbeda bila dibandingkan suhu penampang kawat pada posisi yang lain. Tujuannya adalah untuk mencari distribusi suhu penampang kawat pada setiap posisi x pada waktu t yaitu $u(x,t)$, $(\forall x, t)$.

Misal c merupakan konstanta yang menyatakan seberapa banyak energi panas yang diperlukan ketika menaikkan satuan suhu menjadi per-satuan unit massa pada penampang batang. Jika ingin meningkatkan suhu pada segmen penampang batang dari x ke $x + \Delta x$ sebesar satu deraajat maka energi panas yang diperlukan adalah $\rho \times \mathrm{c} \times \mathrm{A} \times \Delta x$. Sedangkan jika suhunya yang akan ditingkatkan dari nol ke $u(x,t)$ maka energi panas yang diperlukan adalah sebanyak $\rho \times \mathrm{c} \times \mathrm{A} \times \Delta x \times u(x,t)$. Jadi total energi yang dibutuhkan adalah:

$$E(t) = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho \times \mathrm{c} \times \mathrm{A} \times u(z,t)dz\,, t > 0 \tag{1}$$

Persamaan (1) diturunkan terhadap t untuk mendapatkan laju perubahan energi panas ketika waktu t disepanjang segmen penampang batang dari x ke $x + \Delta x$, sehingga diperoleh:

$$Fluks = \frac{\partial E}{\partial t} = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho \times c \times A \times \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} dz \tag{2}$$

Misalkan $\varphi(x,t)$ merupakan suatu fungsi fluks panas yang menyatakan jumlah energi panas per satuan luas yang mengalir melewati penampang batang di ruang x saat waktu t menuju kearah sumbu x (Gambar 4.1). Sehingga diperoleh:

$$E_{fluks} = A\varphi(x,t) - A\varphi(x+\Delta x,t) \tag{3}$$

Selanjutnya digunakan hukum Newton tentang pendinginan yaitu:

$$\varphi(x,t) = -K\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{4}$$

Dengan menggunakan persamaan (3) dan persamaan (4), untuk memperoleh persamaan kecepatan aliran energi panas yang masuk ke segmen penampang dari x ke $x + \Delta x$ menjadi :

$$E_{fluks} = KA\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - KA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{5}$$

Dengan menerapkan Persamaan (2) dan Persamaan (5) maka diperoleh :

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} dz = \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x}\left(kA\frac{\partial u}{\partial x}\right) dz \tag{6}$$

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Dengan $K = \frac{k}{\rho c}$ sebagai koefisien difusi. Persamaan (6) merupakan persamaan panas dimensi satu.

Diskritisasi Interval Pada Suhu

Dipandang persamaan panas dimensi satu, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad t \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq L \tag{7}$$

Dengan syarat awal:

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \mathrm{L}$$

Dan syarat batas:

$$u(0,t) = 0, \;\; t \geq 0$$
$$u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

Persamaan (7) dihampiri dengan menggunakan metode beda hingga dengan mendekati $u(x,t)$ pada suatu interval dari x dan t. Adapun interval yang digunakan adalah untuk ruang x yaitu $0 \leq x \leq L$ dan waitu t yaitu $0 \leq t$.

Pertama, diskritisasi interval ruang x yaitu $0 \leq x \leq L$ sehingga titik-titik x menjadi:

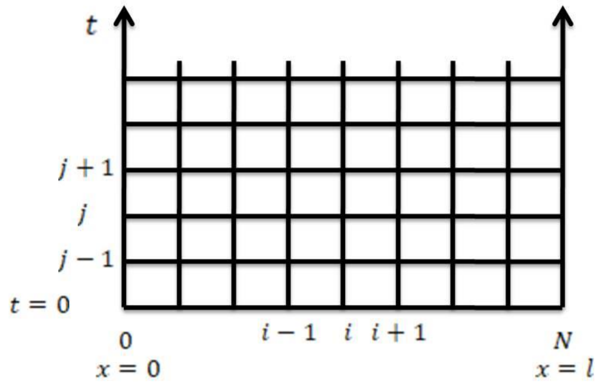
$$x_1 = 0, x_2 = \Delta x, \dots, x_N = (N-1)\Delta x \text{ atau } x_i = (i-1)\Delta x,\ i = 1,2,\dots,N \tag{8}$$

dengan N adalah jumlah total dari titik-titik x termasuk yang ada dibatas. Jumlah total titik-titik dapat ditulis sebagai $\Delta x = \frac{L}{N}$.

Kedua, diskritisasi interval ruang t yaitu $0 < t \leq T$sehingga titik-titik t menjadi :

$$t_1 = 0, t_2 = \Delta t, \dots, t_M = (M-1)\Delta t \text{ atau } t_j = (j-1)\Delta t,\ j = 1,2,\dots,M \tag{9}$$

Dengan M adalah jumlah titik-titik t termasuk yang ada dibatas. Jumlah total titik-titik dapat ditulis sebagai $\Delta t = \frac{T}{M}$.

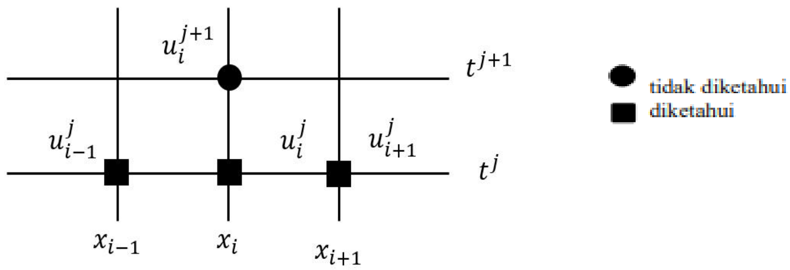


GAMBAR 2. Diskritisasi Persamaan Panas Dimensi Satu

Selanjutnya dilakukan penyederhanaan penulisan berdasarkan Persamaan (8) dan Persamaan (9) maka $u(x_i, t_j)$ dapat notasikan sebagai:

$$u(x_i, t_j) = U_i^j \tag{10}$$

Pendekatan Deret Taylor Untuk Metode Beda Hingga



GAMBAR 3. Skema Eksplisit Persamaan Panas Dimensi Satu

Skema eksplisit digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas dimensi satu dengan dihampiri oleh pendekatan Deret Taylor oleh Hampiran beda maju orde satu dan hampiran beda pusat orde dua. Skema pendekatan beda maju untuk turunan pertama u terhadap t (waktu) yaitu u_t untuk $u(x, t + \Delta t)$ disekitar titik t adalah:

$$u_t\left(x_i, t_j\right) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} \tag{11}$$

Sedangkan pendekatan beda pusat untuk turunan kedua u terhadap x yaitu u_{xx} untuk $u(x + \Delta x, t)$ dan $u(x - \Delta x, t)$ disekitar titik x adalah:

$$u_{xx}\left(x_i, t_j\right) = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} \tag{12}$$

Dengan menggunakan Gambar 3 penyelesaian persamaan panas dimensi satu diselesaikan dengan menggunakan skema eksplisit yaitu fungsi $u(x,t)$ dan turunannya terhadap waktu pada Persamaan (11) dan beda pusat orde dua pada Persamaan (12) disubtitusi ke Persamaan (7) sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = K\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} \tag{13}$$

Selanjutnya Persamaan (13) dikalikan dengan Δt dan dijumlahkan dengan U_i^j sehingga diperoleh:

$$U_i^{j+1} = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j\right) + U_i^j \tag{14}$$

Atau dapat ditulis

$$U_i^{j+1} = s\left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j\right) + U_i^j \tag{15}$$

dengan $s = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Jadi, solusi penyelesaian persamaan panas dimensi satu adalah

$$U_i^{j+1} = s\left(U_{i+1}^j\right) + (1-2s)\left(U_i^j\right) + s\left(U_{i-1}^j\right) \tag{16}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ dan $j = 1, 2, \dots, M$

Nilai U_i^{j+1} dapat diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya yaitu U_{i-1}^j, U_i^j, dan U_{i+1}^j. Dengan nilai i yang sudah diketahui memungkinkan untuk menghitung U_i^{j+1}, dimana $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Simulasi

Selanjutnya akan dijelaskan salah satu contoh simulasi pada persamaan panas dimensi satu. Diberikan persamaan panas dimensi satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, 0 < x < 20 \tag{17}$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = u(0{,}20) = 0, \;\; t \geq 0 \tag{18}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = \begin{cases} 10x, & jika\ 0 \leq x \leq 10 \\ -10x + 200, & jika\ 10 < x \leq 20 \end{cases} \tag{19}$$

dengan $\Delta x = 2,\ \Delta t = 1,\ k = 1$

Persamaan (17), (18) dan (19) akan diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa solusi persamaan panas dimensi satu dengan metode beda hingga skema eksplisit yaitu pada Persamaan (16).

Dalam contoh ini panjang batang adalah 20 cm dan dibagi menjadi 10 grid, sehingga panjang setiap grid adalah $\Delta x = 2$. Sebelum mencari dsitribusi suhu pada batang terlebih dahulu dicari nilai syarat awal dan syarat batas untuk $\Delta x = 2$ sebagai berikut:

$$U_0^0 = 0, U_1^0 = 20, U_2^0 = 40, U_3^0 = 60, \dots, U_9^0 = 20, U_{10}^0 = 0$$

Diketahui $\Delta x = 2,\ \Delta t = 1,\ k = 1$, diperoleh $s = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{4}$. Selanjutnya akan dicari $U_1^1, U_2^1, U_{3,}^1 \dots, U_9^1$ dengan menggunakan Persamaan (4.22) dan nilai-nilai yang sudah diketahui, sebagai berikut:

$$U_1^1 = \frac{1}{4}(U_2^0) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(U_1^0) + \frac{1}{4}(U_0^0) = 20$$

$$U_2^1 = \frac{1}{4}(U_3^0) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(U_2^0) + \frac{1}{4}(U_1^0) = 40$$

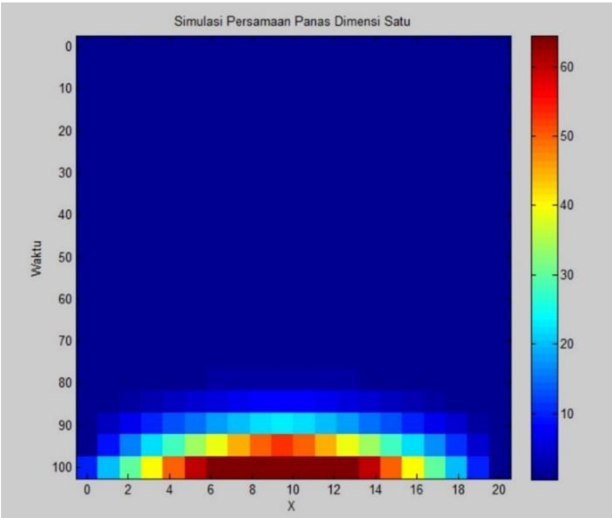
$\vdots$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama dan hasilnya diberikan dalam Tabel 1.

TABEL 1. Hasil Perhitungan Metode Eksplisit

Iterasi	**Waktu(t)**	**Distribusi (°C) di titik hitung**										
j	t	U0	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10
0	0	0	20	40	60	80	100	80	60	40	20	0
1	1	0	20	40	60	80	90	80	60	40	20	0
2	2	0	20	40	60	77.5	85	77.5	60	40	20	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	98	0	2.227682	4.237303	5.832147	6.8561	7.20893	6.8561	5.832147	4.237303	2.227682	0
99	99	0	2.173167	4.133609	5.689424	6.688319	7.032515	6.688319	5.689424	4.133609	2.173167	0
100	100	0	2.119985	4.032452	5.550194	6.524644	6.860417	6.524644	5.550194	4.032452	2.119985	0

Tabel 1 menunjukkan bahwa penyebaran panas dimulai dari tengah bagian batang disekitar titik $x = 5$ pada waktu $t_0 = 0\ s$. Selanjutnya, seiring bertambah waktu maka dapat dilihat bahwa penyebaran panas menyebar keseluruh bagian batang. Selanjutnya sesuai dengan solusi numerik pada Tabel 1 maka dapat diilustrasikan seperti gambar berikut:



GAMBAR 4. Hasil Simulasi Persamaan Panas Dimensi Satu

Gambar 4 merupakan hasil simulasi dari persamaan panas dimensi satu menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Warna merah pada Gambar 4 merupakan suhu yang sangat panas, sedangkan warna biru pada suhu merupakan suhu yang sangat dingin. Pada simulasi tersebut tersebut suhu mengalami perubahan warna signifikan. Hal tersebut dipengaruhi oleh waktu iterasi yang terus berjalan. Kemudian setelah dilakukan beberapa iterasi seperti pada Tabel 1 dan Gambar 4 menjukkan bahwa panas menyebar kebagian batang logam yang lain yaitu dari bagian yang bersuhu tinggi ke bagian yang bersuhu rendah dan seterusnya secara berangsur-angsur. Hal tersebut dipengaruhi oleh waktu dari iterasi $t_0 = 0\ s$ yang terus berjalan sampai iterasi yang ditentukan yaitu $t_{final} = 100\ s$, sehingga mengubah posisi di titik-titik x. Semakin lama waktu terus berjalan maka kurva suhu menuju nol secara seragam.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Dalam menyelesaikan dan menganalisis persamaan panas dimensi satu diperoleh model dari persamaan panas dimensi satu yaitu $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$. Selain itu, solusi untuk persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan pendekatan metode beda hingga skema eksplisit diperoleh dalam bentuk rumus berupa $U_i^{j+1} = s\left(U_{i+1}^j\right) + (1-2s)\left(U_i^j\right) + s\left(U_{i-1}^j\right)$.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa perubahan distribusi suhu terjadi secara berangsur-angsur. Hal tersebut dipengaruhi oleh waktu dari iterasi yang terus berjalan sampai iterasi yang ditentukan. Semakin lama waktu terus berjalan maka kurva suhu menuju nol secara seragam.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, R. A. (2020). *Penyelesaian numeris beda hingga persamaan diferensial parsial* (Skripsi dipublikasikan). Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Yogyakarta.

Andriani, R. (2005). *Persamaan diferensial linear dan aplikasinya* (Skripsi dipublikasikan). Universitas Negeri Semarang, Semarang.

Caesar, L., Sinopa, K., Noviani, E., & Rizki, S. W. (2020). Hampiran Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu Dengan Metode Beda Hingga Crank-Nicolson. *Buletin Ilmiah Mat dan Terapannya (Bimaster), 9*(1). 195–204

Dita, M. F., & Widodo, B. (2013). Karakteristik aliran panas dalam logam. *Jurnal Teknik Pomits, 2*(1). 1–5.

Holman, J. (2010). *Heat Transfer (10thed)*. New York: The McGraw-Hill Companies.

Lutfiyati, I. (2018). *Analisis simulasi aliran debris dengan metode beda hingga skema eksplisit* (Skripsi dipublikasikan). Universitas Negeri Semarang, Semarang.

Maghfur, M. A., & Kusumawati, A. (2017). Penyelesaian masalah difusi panas pada suatu kabel panjang. *Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya* (65–72). Surabaya, Indonesia: Universitas Airlangga.

Rahayu, N., Waluya, S. B., & Wuryanto. (2012). Model perpindahan kalor pada mesin pengering padi. *Unnes Journal of Mathematics, 1*(2). 1110–1115.

Suparno, P. (2009). *Pengantar Termofisika*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Zaki, A., Side, S., & Nurhaeda, N. (2019). Solusi persamaan laplace pada koordinat bola. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 2*(1), 82-90.