SKRIPSI

SUATU KAJIAN TENTANG JUMLAHAN LANGSUNG PADA RING

ANNISA UNIARTI

1611141001

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya Saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk telah Saya nyatakan dengan benar. Bila dikemudian hari ternyata pernyataan Saya terbukti tidak benar maka Saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu penetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.

Yang membuat pernyataan,

Nama : Annisa Uniarti
NIM : 1611141001
Tanggal : 30 Januari 2020

PERSETUJUAN PUBLIKASI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai sivitas akademika Universitas Negeri Makassar, Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Annisa Uniarti
NIM	: 1611141001
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

demi pengembangan ilmu pengetahuan, Saya menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Negeri Makassar **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exculive Royalty-Free Right)** atas skripsi Saya yang berjudul: **Suatu Kajian Tentang Jumlahan Langsung Pada Ring,** beserta perangkap yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non ekslusif ini Universitas Negeri Makassar berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan mempublikasikan skripsi Saya selama tetap mencantumkan nama Saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta, serta tidak dikomersialkan.

Demikian pernyataan ini Saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Makassar
Pada tanggal : 30 Januari 2020

Yang menyatakan,

Annisa Uniarti

Menyetujui

Pembimbing I

Prof. Dr. Syafruddin Side, M.Si.
NIP.19720202 199702 1 002

Pembimbing II

Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si,
NIP.19690129 199403 1 001

MUTIARA HIKMAH DAN PERSEMBAHAN

"Cukuplah Allah (menjadi penolong) bagi kami dan Dia sebaik-baik pelindung"
(QS: Ali 'Imran ayat 173)

"Kita tidak akan tahu doa yang mana dan usaha yang keberapa yang akan terkabul, tugas kita hanya memperbanyak"
(Anonim)

"Kalau tahu kekuatan pikiran dan perasaan, tentu kamu tidak akan pernah berpikiran negatif"
(Ary Ginanjar Agustian)

"Hadiah yang paling istimewa adalah doa"

"Ingat Allah di setiap perjalananmu, maka kamu akan selalu bertemu dengan orang-orang baik yang membantu di setiap persinggahanmu"

Kupersemabahkan karya sederhana ini untuk dua insan yang amat berharga bagiku, yang selalu memberi nasihat, medoakan dan menyayangiku dengan tulus, **Ayah** dan **Ibu**.

ABSTRAK

Annisa Uniarti. 2019. *Suatu Kajian Tentang Jumlahan Langsung pada Ring*. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Makassar (dibimbing oleh Syafruddin Side dan Muhammad Abdy).

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji konsep dasar jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring beserta sifat-sifatnya. Adapun literatur utama yang digunakan adalah buku yang ditulis oleh B. Hartley dan T.O. Hawkes (1970). Hasil yang diperoleh menjelaskan dan menguraikan definisi konsep jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring, teorema-teorema tentang sifat-sifat jumlahan langsung pada ring,serta sebuah teorema akibat dari representasi sifat jumlahan langsung pada modul yang berkaitan dengan jumlahan langsung internal pada ring.

Kata Kunci: *Ring, Jumlahan Langsung Eksternal, Jumlahan Langsung Internal*.

ABSTRACT

Annisa Uniarti. 2019. *The Study About Direct Sum Of Ring*. Thesis. The Department Of Mathematics. Faculty Of Mathematics and Natural Sciences. State University Of Makassar (supervised by Syafruddin Side and Muhammad Abdy).

This research aims to review the basic consept of external direct sum of ring, internal direct sum of ring, and properties of direct sum of ring. The main literature used is a book written by B. Hartley and T.O. Hawkes (1970). The result obtained explain and elaborated on the definitons of external direct sum and internal direct sum of ring, theorems about properties of direct sum of ring, as well as a theorem resulting from the representation of the properties of direct sum of modules relating to internal direct sum of ring.

Kata Kunci: *Ring, External direct sum, Internal direct sum*.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil ‘alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT, atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang berjudul *“Suatu Kajian Tentang Jumlahan Langsung pada Ring”*, sebagai salah satu syarat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar. Sholawat serta salam semoga selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia-manusia menuju jalan kebahagiaan hidup di dunia dan di akhirat.

Terima kasih yang tak terhingga penulis hanturkan kepada sosok Ayahanda Dg Silajak dan Ibunda Agustina atas segala doa, kasih sayang, cinta, nasihat, motivasi, serta berbagai macam bantuan, baik secara moril maupun materil. Terima kasih atas bimbingan serta ketulusan dalam merawat penulis dari lahir hingga sekarang. Dan tak lupa terima kasih kepada semua keluarga atas segala dorongan dan bantuannya selama ini. Semoga Allah membalas semua kebaikannya dengan pahala yang berlipat ganda.

Banyak pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati, penulis ingin mengucapkan rasa terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Husain Syam, M.TP. selaku Rektor Universitas Negeri Makassar
2. Bapak Drs. Suwardi Annas, M.Si.,Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas negeri Makassar.

3. Bapak Dr. Asdar, M.Pd., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.
4. Ibu Wahidah Sanusi, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas negeri Makassar.
5. Bapak Prof. Syafruddin Side, M.Si.,Ph.D., selaku dosen pembimbing skripsi I penulis selama kuliah. Terima kasih telah bersedia meluangkan waktu dan pikiran untuk penulis selama ini,
6. Bapak Dr. Muhammad Abdy, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi II. Terima kasih telah bersedia meluangkan waktu dan pikiran untuk penulis selama ini.
7. Bapak Sukarna. S.Pd., M.Si. selaku selaku penguji I dan Ibu Wahidah Sanusi, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku Penguji II atas segala saran dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Bapak Sahlan Sidjara, S.Si., M.Si., Selaku pembimbing akademik yang telah membimbing penulis dengan sabar, memberikan banyak masukan dan saran, serta tiada henti memotivasi penulis hingga pada akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Bapak Sukarna. S.Pd., M.Si., yang selalu memberikan motivasi dan membimbing penulis.
10. Bapak Fajar Arwadi, S.Pd., M.Sc., dan Bapak Sahlan Sidjara, S.Si., M.Si., Dosen Pembimbing KKN penulis.
11. Bapak/Ibu dosen Matematika FMIPA UNM yang telah menyalurkan ilmunya secara ikhlas serta mendidik penulis. Semoga apa yang diberikan senantiasa menjadi amal jariyah.
12. Teman-teman seperjuangan kelas “SEG16”, Imma, Ifa, Wati, Emi, Sri, Asmel, Cica, Tina, Tika, Aul, Dian, Elma, Ica, Auliah, Amel, Rati, Lian, Risda, Agnes, Mei, Wyhda, Babas, Irham, Amrin, Zaenal, Risman, Anto, Ridwan, Ilham, Ridho, Ikram. Terima kasih atas persahabatan selama ini, Semoga persahabatan ini selalu terjalin sampai kapanpun dan dimanapun.

13. Sahabat-sahabatku “SOLME” , Sakinah, Novi, Hasti, Fitry, Ira, dan Asti. Terima kasih selalu memberikan motivasi kepada penulis.
14. Sahabat-sahabatku sejak “Bureng Squad” , Imma, Ifa, dan Wati. Terima kasih atas segala bantuan dan motivasi nya kepada penulis.
15. Teman-teman seperjuangan “TIM PKM KECE” , Kak Ray, Kak Ismail, Dan Imma. Terima kasih selalu memberi semangat dan saran kepada penulis.
16. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir, Emi dan Sri, yang tanpa lelah menemani penulis saat bimbingan. Jazakumullahu Khoir.
17. Kak Alam, kakak angkatan yang banyak berjasa, yang selalu memberikan saran dan memberikan pencerahan kepada penulis.
18. Teman-teman angkatan 2016 “POL16ON.
19. Teman-teman Analisis Data, Kak Amni, Kak Ray, kak Kadir, kak Ani, kak Rahmat, Kak Cia, Devi, Eka, Ifda, Emi, Rati, Mei, Nunu, Elma.
20. Teman-teman seperjuangan KKN PPM UNM 2019 Desa Lerang, Dinda, Sri, Rati, Risda, Amel, Dian, Cica, Ifah, Indri, Mita, Kak Mita, Sylvi, Kak Aminah, Babas, Amrin, Aslan, Rachmat, Arya, Aldy, Faiq, Fiki.
21. Teman-teman dan adik-adik seperjuangan, pengurus “ HMJ MATEMATIKA FMIPA UNM periode 2018-2019.Terima kasih telah mewarnai kehidupan lembaga penulis.
22. Kakak-adik angkatan 2013,2014,2015,2017, dan 2018, 2019 yang tak bisa penulis sebutkan satu persatu yang selama ini telah memberikan semangat, bantuan dan motivasi kepada penulis.
23. Pak Salam, Bapak kost sekaligus orang tua bagi penulis di tanah rantau selama tiga tahun.
24. Semua pembaca yang arif dan budiman.

Semoga bantuan yang telah diberikan mendapat balasan yang lebih baik dari Allah. Penulis memohon maaf atas segala kesalahan yang pernah dilakukan baik secara sengaja maupun tidak sengaja. Penulis sadar bahwa tulisan penulis ini masih jauh dari kata sempurna.

Oleh karena itu, saran dan kritik selalu penulis terima demi perbaikan tulisan penulis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsin ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Wassalamu'Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Makassar, November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$+$	: Tambah
$\times$	: Kali
$*$	: Operasi biner
$\in$	: Elemen
$\cdot$	: Operasi Penggandaan
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
G	: Grup
R	: Ring
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan riil
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: Himpunan semua bilangan rasional
$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$	: Matriks 2×2 dengan entri-entri rill
$\cap$	: Irisan
$\oplus$	: Jumlahan langsung
$\sum$	: Sigma
$\rightarrow$	: Pengaitan
$\Rightarrow$	: Implikasi
$\Leftrightarrow$	: Biimplikasi
$\mathbb{Z}_n$	: Bilangan bulat modulo n
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Aljabar adalah salah satu cabang dari bidang matematika yang mempelajari tentang pemecahan masalah menggunakan simbol-simbol sebagai pengganti konstanta dan variabel. Salah satu cabang dari ilmu alajabar adalah aljabar abstrak atau biasa juga disebut aljabar modern. Aljabar abstrak secara dasar mempelajari tentang struktur-struktur aljabar beserta sifat-sifatnya. Dalam aljabar abstark, suatu struktur aljabar terdiri dari satu himpunan tak kosong atau lebih dengan satu operasi atau lebih serta memenuhi beberapa aksioma (Khotimah,2012:2)

Strukur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong R dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya asosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ yang memenuhi tiga aksioma diantara yaitu $(R, +)$ berupa grup abelian, operasi kedua $(\times)$ bersifat asosiatif dan operasi kedua $(\times)$ bersifat distributif terhadap operasi pertama $(+)$ disebut ring (Dummit & Foote, 1991:510 dalam Dewi, 2013:3). Selanjutnya, struktur aljabar yang mempunyai dua himpunan tak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu disebut dengan modul (Wildaniaanti, 2009:4).

Dalam struktur aljabar, terdapat sebuah operasi yang disebut "jumlahan langsung". Jumlahan langsung dengan jumlahan biasa tidak sama. Pada penjumlahan biasa tidak memperhatikan urutan komponennya, tetapi pada penjumlahan langsung memperhatikan urutaun komponennya (Wildanianti, 2009:54). Jumlahan langsung terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Yunita Wildanianti pada tahun 2009 telah membahas tentang penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam pada struktur aljabar modul beserta sifat-sifatnya dalam penelitiannya yang berjudul Penjumlahan Langsung pada Modul, sedangkan dalam penelitian ini penulis bermaksud untuk mengkaji tentang jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada struktur aljabar ring beserta sifat-sifatnya yang oleh penulis diberi judul " **Suatu Kajian Tentang Jumlahan Langsung pada Ring** "

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diajukan pada peneletian ini adalah :

1. Bagaimana konsep jumlahan langsung eksternal dan internal pada ring?
2. Bagaimana sifat-sifat jumlahan langsung pada ring?

C. Tujuan Peneltian

Berdasarkan dari rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menjelasakan tentang jumlahan langsung eksternal dan internal pada ring
2. Mengkaji sifat-sifat jumlahan langsung pada ring

D. Manfaat Penelitian

Peneliti berharap hasil dari penelitian ini nantinya dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan, diantaranya:

1. Bagi penulis

   Dapat menambah pemahaman serta memperluas wawasan disiplin ilmu khususnya mengenai jumlahan langsung pada ring.

2. Bagi pembaca

   Sebagai tambahan bahan pelajaran dan informasi tentang jumlahan langsung pada ring.

3. Bagi instansi

   Sebagai bahan informasi pada pembelajaran mata kuliah aljabar abstrak dan sebagai tambahan bahan perpustakaan.

BAB II

KAJIAN TEORI

Cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar di sebut aljabar abstrak. Sistem aljabar terdiri dari himpunan objek dengan satu atau lebih operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

A. Grup

Struktur aljabar dengan satu himpunan objek dan satu operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut grup.

sebelum membahas definisi grup terlebih dahulu akan dibahas mengani operasi biner.

Definisi 2.1 (Tahmir, 2004: 20)

Misal G himpunan tak kosong, operasi $*$ pada G adalah operasi biner jika untuk setiap $a, b \in G$ maka $a * b \in G$

1. Definisi grup

Definisi 2.2 (Gallian, 2017: 43)

Himpunan tak kosong G dengan sebuah operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi sifat berikut :

(i) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c \in G$ (sifat asosiatif)

(ii) Terdapat $e \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$ (adanya unsur identitas di G)

(iii) Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (adanya unsur invers setiap anggota di G)

Selanjutnya, himpunan tak kosong G dengan operasi $*$ dinotasikan dengan $(G,*)$. Jika $(G,*)$ suatu grup dan memenuhi sifat komutatif yaitu

$a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$, maka G disebut grup komutatif, jika $(G,*)$ memenuhi (i) disebut semigrup, dan jika $(G,*)$ memenuhi (i) dan (ii) disebut monoid.

Contoh 2.1

Diberikan $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup komutatif karena memenuhi semua syarat grup komutatif. Penjelasannya sebagai berikut:

Ambil sebarang $A, B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tulis $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$, dengan $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa:

1. $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

   [karena bilangan riil memenuhi sifat tertutup]

   Jadi $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ memenuhi sifat tertutup.

2. $(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & b_1 + (b_2 + b_3) \\ c_1 + (c_2 + c_3) & d_1 + (d_2 + d_3) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= A + (B + C)$$

Jadi $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ memenuhi sifat asosiatif.

3. Pilih $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sehingga

$$A + I = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$I + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

Karena $A + I = I + A = A$, maka $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ memenuhi adanya unsur identitas dengan $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sebagai unsur identitasnya.

4. Diketahui $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pilih $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sehingga

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} + A = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $A + A^{-1} = A^{-1} + A = I$, maka $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$ memenuhi adanya unsur invers.

5. $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & d_2 + d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= B + A$$

Definisi 2.3 (Tahmir, 2018: 10)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup.

a. *Jika banyaknya anggota G terhingga, maka $(G,*)$ disebut grup terhingga.*
b. *Jika banyaknya anggota G takterhingga, maka $(G,*)$ disebut grup takterhingga.*

Untuk $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ masing-masing merupakan grup takterhingga, sedangkan $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup terhingga.

2. Homomorpisma grup

Definisi 2.4 (Tahmir, 2018: 20)
Misalkan $(G,*)$ dan (G', o) masing-masing adalah grup. Suatu fungsi $f: G \to G'$ dinamakan suatu homomorpisma jika $f(a * b) = f(a) o f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

Selanjutnya jika $f : G \to G'$ suatu homomorpisma, maka f juga disebut :

a. Monomorpisma jika f *injektif*
b. Epimorpisma jika f *surjektif*
c. Isomorpisma jika f *bijektif*
d. Endomorpisma Jika $G = G'$
e. Automorpisma jika $G = G'$ dan f *bijektif*

Contoh 2.3

Diberikan $(\mathbb{Z}, +)$ dan $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ masing-masing merupakan grup. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ yang di definisikan oleh $f(a) = m(a)$, untuk setiap $a \in G$. f merupakan suatu homomorpisma karena:

1. f terdefinisi dengan baik.

   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a = b$ maka $f(a) = f(b)$.

   ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ sebaran. Perhatikan bahwa $a = b$, sehingga

   $$\begin{aligned} f(b) &= m(b) \\ &= m(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f(a +_Z b) &= m(a +_Z b) \\ &= m(a) +_{Zm} m(b) \end{aligned}$$

B. Ring

Struktur aljabar dengan satu himpunan objek dan dua operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut Ring.

1. Definisi

Definisi 2.5 (Dummit and Foote, 2004: 223)
Misalkan R suatu himpunan tak kosong dan pada R di definisikan dua operasi biner yang dinotasikan $+$ dan $\cdot$, yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$ jika memenuhhi sifat :

(i) $(R, +)$ *merupakan grup komutatif*

(ii) *Operasi $\cdot$ di R bersifat tertutup, yaitu:*
$(r_1 \cdot r_2) \in R$
$untuk\ setiap\ r_1, r_2 \in R$

(iii) *Operasi $\cdot$ di R bersifat asosiatif, yaitu:*
$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$

$untuk\ setiap\ r_1, r_2, r_3\ \in\ R$

(iv) *Operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:*

a. *Distributif kiri:*

$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$

$untuk\ setiap\ r_1, r_2, r_3\ \in\ R$

b. *Distributif kanan:*

$(r_1 + r_2) \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$

$untuk\ setiap\ r_1, r_2, r_3\ \in\ R$

Secara ringkas, ring R terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dinotasikan sebagai $(R, +,\cdot)$.

Contoh 2.4 :

Contoh ring yang paling terkenal adalah bilangan bulat $\mathbb{Z}$, rasional $\mathbb{Q}$, riil $\mathbb{R}$ dan kompleks $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan.

Definisi 2.6 (Wahyuni dkk, 2016: 8)

Ring R disebut:

(i) ***Ring komutatif*** *jika R komutatif terhadap perkalian (operasi kedua) yaitu* $r, s\ \in\ R$ *berlaku* $rs\ =\ sr$.

(ii) ***Ring dengan elemen satuan*** *jika R mempunyai elemen satuan terhadap perkalian, yaitu terdapat* $1_R \in\ R$ *sehingga untuk setiap* $r\ \in\ R$ *berlaku* $r1_R\ =\ 1_R r\ =\ r$

(iii) ***Ring komutatif dengan elemen satuan*** *jika R merupakan ring komutatif dan mempunyai elemen satuan terhadap perkalian.*

(iv) ***Ring pembagian*** *jika R mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nol di R mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu untuk setiapa elemen tak nol di R terdapat* r^{-1} *di R sehingga* $rr^{-1} = r^{-1}r = 1_R$

Contoh 2.5:

1. Ring $2\mathbb{Z}$,merupakan ring komutatif, tetapi tidak mempunyai elemen satuan.
2. Ring $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, merupakan ring dengan elemen satuan berupa matriks identitasI_2, tetapi bukan ring komutatif.
3. Ring $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, dan $\mathbb{C}$ masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Ring $(\mathbb{R}, +,\cdot), (\mathbb{Q}, +,\cdot)$, dan $(\mathbb{C}, +,\cdot)$ masing-masing merupakan ring pembagian

2. Ideal

Definisi 2.7 (Suryanti, 2018: 57)
Misalkan R adalah suatu Ring dan I adalah himpunan bagian dari Ring R dengan $I \neq \emptyset$, maka I disebut Ideal dari R jika:
(i) Untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$
(ii) Untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r, r s_1 \in I$
Apabila hanya memenuhi salah satu yaitu untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r \in I$ maka disebut ideal kanan dan untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $r s_1 \in I$ maka disebut ideal kiri.

Contoh 2.5:

Diberikan ring matriks $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Misalkan

$$I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

$$I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

Ideal I_1 merupakan ideal kiri di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dan I_2 merupakan ideal kanan di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1(Wahyuni, dkk, 2016:19)
Jika R merupakan ring dengan I_1 dan I_2 masing-masing merupakan ideal dari R, maka
(i) $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di R
(ii) $I_1 + I_2 = \{a + b \mid a \in I_1 \, dan \, b \in I_2\}$ merupakan ideal di R

Bukti

Diketahui I_1 dan I_2 masing-masing merupakan ideal dari R.

(i) akan dibuktikan $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di *R*.

ambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I_1 \cap I_2$.

karena $x, y \in I_1, x, y \in I_2, I_1$ dan I_2 ideal, diperoleh:

1. $x - y \in I_1$ dan $x - y \in I_2$
2. $rx \in I_1$ dan $xr \in I_1$
3. $rx \in I_2$ dan $xr \in I_2$

akibatnya, $x - y \in I_1 \cap I_2, rx \in I_1 \cap I_2$, dan $xr \in I_1 \cap I_2$.

jadi, $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di *R*.

(ii) akan dibuktikan $I_1 + I_2$ merupakan ideal di *R*.

ambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I_1 + I_2$, tulis $x = a_1 + a_2, y = b_1 + b_2$, untuk suatu $a_1, b_1 \in I_1$ dan $a_2, b_2 \in I_2$. Karena I_1, I_2 merupakan ideal di *R* diperoleh $a_1 - b_1 \in I_1$ dan $a_2 - b_2 \in I_2, ra_1 \in I_1, a_1r \in I_1, ra_2 \in I_2, a_2r \in I_2$ sehingga

1. $x - y = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)$

   $= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in I_1 + I_2$
2. $xr = (a_1 + a_2)r$

   $= a_1r + a_2r \in I_1 + I_2$
3. $rx = r(a_1 + a_2)$

   $= ra_1 + ra_2 \in I_1 + I_2$

jadi, $I_1 + I_2$ merupakan ideal di R

3. Homomorpisma Ring

Definisi 2.8 (Setiawan, 2014: 122)
Jika $(R, +_R, \times_R)$ *dan* $(R', +_{R'}, \times_{R'})$ *ring, pemetaan* $f: R \rightarrow R'$ *adalah ring homomorpisma jika:*

$$f(a +_R b) = f(a) +_{R'} f(b)$$

dan

$$f(a \times_R b) = f(a) \times_{R'} f(b)$$

untuk setiap $a, b \in R$.

Selanjutnya jika $f : R \rightarrow R'$ suatu homomorpisma, maka f juga disebut :

a. Monomorpisma jika f *injektif*

b. Epimorpisma jika f *surjektif*

c. Isomorpisma jika f *bijektif*

d. Endomorpisma Jika $R = R'$

e. Automorpisma jika $R = R'$ dan f *bijektif*

Contoh 2.6:

Didefinisikan pemetaan $f : R \rightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dengan $f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

Jika diambil sebarang $x, y \in R$ maka berlaku sifat

$$f\,(x + y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$= f\,(x) + f(y)$$

$$f\,(x \times y) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$= f\,(x) \times f(y)$$

Artinya f homomorpisma ring .

C. Hasil Kali Kartesian

Definisi 2.9(Bhattacharya, dkk, 1994: 9)
misal A, B adalah himpunan. Hasil kali kartesian dari A dan B adalah:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, b \in B\}$$

Contoh 2.7:

Misal $A = \{1,2\}, B = \{a, b, c\}$

Hasil kali kartesian dari A dan B adalah:

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

D. Penelitian Relevan

Adapun penelitian yang dijadikan acuan pada penelitian ini adalah penelitian Wildanianti (2009) yang berjudul Penjumlahan langsung pada Modul, dan Patty (2014) yang berjudul hasul Kali Langsung S-Near-Ring dan S-Near-Ring Bebas. Dalam penelitiannya, Yunita Wildanianti memaparkan penjelasan tentang penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam serta mendeskripsikan sifat-sifat penjumlahan langsung pada Modul, sementara dalam penelitian Henry W.M Patty membahas tentang hasil kali langsung pada S-near-ring dan struktur near-ring Smarandache bebas.

Terdapat sifat penjumlahan langsung pada modul di dalam penelitian Yunita Wildanianti yang akan dijadikan acuan oleh penulis untuk membangun sifat yang serupa pada struktur aljabar ring, begitupun pada penelitian Henry W.M Patty, terdapat satu sifat pada jumlah langsung S-near-ring yang dijadikan motivasi untuk sifat jumlahan langsung pada ring.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian dasar atau murni. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur, yaitu dengan membaca literatur-literatur yang berhubungan dengan jumlahan langsung pada ring.

B. Waktu dan Lokasi Penelitian

Penelitian ini akan dilaksanakan pada bulan Juli 2019 s/d November 2019 di Perpustakaan Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar.

C. Fokus Kajian

Fokus kajian pada penelitian ini terletak pada penjelasan tentang jumlahan langsung pada ring dan sifat-sifat jumlahan langsung pada ring.

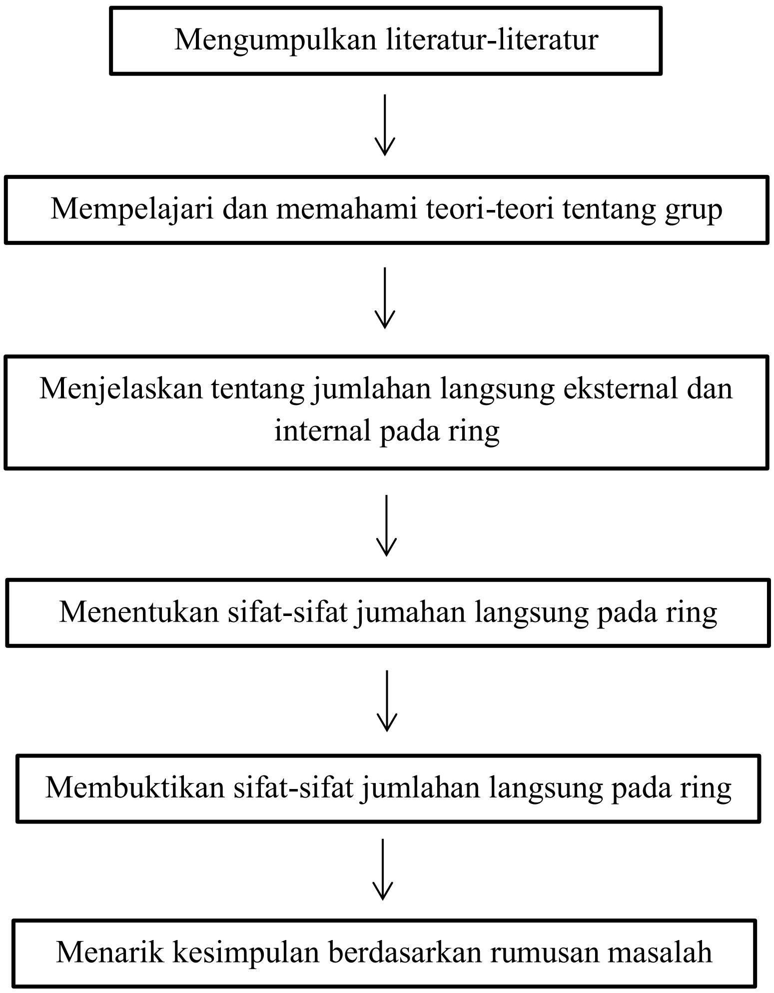
D. Prosedur Penelitian

Agar tujuan dalam penelitian ini tercapai, akan dilakukan langkah-langkah berikut:

1. Menjelasakan tentang jumlahan langsung eksternal dan internal pada ring
   a. Mempelajari teori-teori tentang grup dan ring sebagai landasan utama definisi maupun teorema tentang jumlahan langsung eksternal dan internal pada ring.
   b. Menentukan definisi-definisi, penjelasan definisi serta memberikan contoh tentang jumlahan langsung eksternal dan internal pada ring
2. Mengkaji sifat-sifat jumlahan langsung pada ring
   a. Menunjukkan sifat-sifat jumlahan langsung pada ring yang dimotivasi dari sifat penjumlahan langsung pada modul dan sifat jumlah langsung pada near-ring, serta pada referensi lain.
   b. Memaparkan pembuktian dari teorema-teorema yang telah ditunjukkan menggunakan bantuan dari definisi ideal, ring, jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal, serta homomorpisma dan epimorpisma ring.

E. Skema Penelitian

Alur penelitian disajikan dalam gambar 3.1 berikut.



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan kajian pustaka dan beberapa literatur, berikut ini akan dibahas mengenai konsep pada jumlahan langsung pada ring baik itu jumlahan langsung eksternal maupun internal beserta sifat-sifatnya.

A. Hasil Penelitian

Berikut ini beberapa definisi dan teorema yang digunakan untuk mengetahui apa itu jumlahan langsung pada ring beserta sifat-sifatnya:

1. Jumlahan Langsung pada Ring

Jumlahan langsung pada ring terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Berikut diuraikan definisi dari keduanya.

a. Jumlahan langsung eksternal

Definisi 4.1(hartley dan hawkes, 1970:33)
Misalkan $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *adalah kumpulan ring dan* R *adalah Hasil kali kartesian pada himpunan* R_i*, dan didefinisikan operasi pada* R *"secara komponen", yaitu:*

i. $(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$

ii. $-(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (-r_1, -r_2 \ldots, -r_n)$

iii. $(r_1, r_2, \ldots, r_n)(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots, r_n s_n)$

Dengan $(0,0, \ldots ,0)$ *sebagai elemen nol/identitas.* R *disebut jumlahan langsung eksternal dari* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *dan dinotasikan sebagai*

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n.$$

Definisi di atas menunjukkan bahwa jumlahan langsung external dari ring $R_1, \ldots, R_n$ adalah

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$$

dengan operasi penambahan dan perkalian bersifat komponen.

Contoh 4.1

Diketahui $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ dan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan ring.

Jumlahan langsung eksternal dari $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ adalah

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 = \{0,1\} \oplus \{0,1,2,3\}$$

$$= \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$$

b. Jumlahan langsung internal

Definisi 4.2(hartley dan hawkes, 1970:34)
Misal R adalah ring, dan $J_1, \dots, J_n$ *adalah ideal-ideal dari R, sedemikian sehingga*
(i) $R = \sum_{i=1}^{n} J_i$, *dan*
(ii) $J_i \cap \sum_{J \neq i} J_j = \{0\}$, *untuk* $i = 1, \dots, n$.

Maka R disebut sebagai jumlahan langsung internal dari ideal-ideal J_i *yang dinotasikan sebagai* $R = \oplus J_i$.

Definisi di atas menunjukkan bahwa suatu ring R disebut jumlahan langsung internal dari ideal-ideal $J_1, \dots, J_n$ jika berlaku:

$$R = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$$

dan

$$J_i \cap (J_1 + J_2 + \cdots + J_{i-1} + J_{i+1} + \cdots + J_n) = \{0\}, \text{untuk } i = 1, \dots, n.$$

Contoh 4.2

Misal $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dan P_1, P_2, P_3 adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$, dimana $P_1 = \{0\}$, $P_2 = \{0,3\}$, $P_3 = \{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6$ merupakan jumlahan langsung internal dari P_1, P_2, P_3, karena:

a. $P_1 + P_2 + P_3 = \{0\} + \{0,3\} + \{0,2,4\}$

$$= \{0,1,2,3,4,5\}$$

b. $P_1 \cap (P_2 + P_3) = \{0\} \cap \{0,2,4,3,5,1\}$

$= \{0\}$

c. $P_2 \cap (P_1 + P_3) = \{0,3\} \cap \{0,2,4\}$

$= \{0\}$

d. $P_3 \cap (P_1 + P_2) = \{0,2,4\} \cap \{0,3\}$

$= \{0\}$

Apabila di ambil $P_3 = \{2,4\}$ maka $\mathbb{Z}_6$ bukan jumlahan langsung internal dari P_1, P_2, P_3, karena P_3 bukan ideal di $\mathbb{Z}_6$ (karena apabila diambil $0 \in \mathbb{Z}_6$, dan $2 \in P_3$ maka $0 \times 2 = 0 \notin P_3$)

2. Sifat – sifat jumlahan langsung pada ring

Pada bagian ini akan diuraikan sifat-sifat jumlahan langsung pada ring beserta pembuktiannya.

Teorema 4.1
Jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring.

Bukti

Diketahui $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ merupakan jumlahan langsung eksternal dari ring R_i, dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Ambil sebarang $a, b, c \in R$, tulis $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, untuk suatu $a_1, b_1, c_1 \in R_1$, $a_2, b_2, c_2 \in R_2$, $a_n, b_n, c_n \in R_n$, akan ditunjukkan $(R, +, \cdot)$ merupakan ring.

i. $(R, +)$ grup

1. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.

$a + b = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

dengan $(a_1 + b_1) \in R_1, (a_2 + b_2) \in R_2, \dots, (a_n + b_n) \in R_n$

jadi $(a + b) \in R$

2. Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$$
\begin{aligned}
(a + b) + c &= \big((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)\big) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
&= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n) \\
&= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) \\
&= a + (b + c)
\end{aligned}
$$

3. Terdapat unsur identitas

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $e \in R$, sehingga $a + e = e + a = a$.

Ambil sebarang $a \in R$, akan ditunjukkan terdapat $e \in R$ tulis $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, dengan $e_1 \in R_1, e_2 \in R_2, \dots, e_n \in R_n$ sehingga berlaku

$$a + e = e + a = a$$

Pilih $0_R \in R$, tulis $0_R = (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$, dengan $0_{R_i} \in R_i$, 0_{R_i} adalah unsur identitas di R_i.

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
a + 0_R &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}) \\
&= \left(a_1 + 0_{R_1}, a_2 + 0_{R_2}, \dots, a_n + 0_{R_n}\right) \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_n)
\end{aligned}
$$

$0_R + a = \left(0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}\right) + (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$= \left(0_{R_1} + a_1, 0_{R_2} + a_2, \dots, 0_{R_n} + a_n\right)$

$= (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Jadi $0_R \in R$ adalah unsur identitas di R.

4. Untuk setiap unsur memiliki invers

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0_R$.

Ambil $a \in R$ sebarang, akan ditunjukkan terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga berlaku

$$a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0_R$$

Diketahui $0_R = (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$

$a + a^{-1} = 0_R$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + a^{-1} = \left(0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}\right)$

$a^{-1} = \left(0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}\right) - (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$= \left(0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}\right) + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

$= \left(0_{R_1} + (-a_1), 0_{R_2} + (-a_2), \dots, 0_{R_n} + (-a_n)\right)$

$= (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in R$

Sehingga $a^{-1} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ adalah unsur invers untuk setiap $a \in R$.

5. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$

$(a + b) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n)$ [karena $a_i, b_i \in R_i, i = 1,2, \dots, n$]

$= b + a$

ii. $(R,\cdot)$ semigrup

1. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$.

$a \cdot b = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$

dengan $(a_1 b_1) \in R_1, (a_2 b_2) \in R_2, \dots, (a_n b_n) \in R_n$

jadi $(a \cdot b) \in R$

2. Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$(a \cdot b) \cdot c = \big((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)\big) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$= ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n)$

$= (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n))$

$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n))$

$= a \cdot (b \cdot c)$

3. $(R, +,\cdot)$ distributif kanan dan kiri

Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:

1. $(a + b). c = a \cdot c + b \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1. Distributif kanan

$(a + b). c = ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$= ((a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n + b_n) \cdot c_n)$$

$$= ((a_1 \cdot c_1) + (b_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot c_2) + (b_2 \cdot c_2), \dots, (a_n \cdot c_n) + (b_n \cdot c_n)$$

$$= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n + b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \dots, b_n \cdot c_n)$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$= a \cdot c + b \cdot c$$

2. Distributif kiri

$$a \cdot (b + c) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \big((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)\big)$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n)$$

$$= (a_1 \cdot ((b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2), \dots, a_n \cdot (b_n + c_n))$$

$$= ((a_1 \cdot b_1) + (a_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot b_2) + (a_2 \cdot c_2), \dots, (a_n \cdot b_n) + (a_n \cdot c_n)$$

$$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n)$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$= a \cdot b + a \cdot c \quad \blacksquare$$

Jadi, jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring.

Contoh 4.3

Diketahui $\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1,2,3, \dots\}$ adakah ring. Misalkan:

$$P = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$= \{\dots, -1,0,1,2,3, \dots\} \oplus \{\dots, -1,0,1,2,3, \dots\}$$

$$= \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

selanjutnya, akan dibuktikan bahwa P adalah ring.

bukti

Ambil $A, B, C \in P$ sebarang, tulis $A = (a_i, b_j), B = (a_r, b_s), C = (a_m, b_n)$, untuk suatu $a_i, b_j, a_r, b_s, a_m, b_n \in \mathbb{Z}$. Diketahui P tidak kosong karena $(-1,0) \in P$.

1. $(P, +)$ grup komutatif

   a. untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b \in P$

   $a + b = (a_i, b_j) + (a_r, b_s)$

   $= (a_i + a_r, b_j + b_s)$

   dengan $a_i + a_r, b_j + b_s \in \mathbb{Z}$

   jadi, untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b \in P$

   b. untuk setiap $a, b, c \in P$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$

   $(a + b) + c = \left((a_i, b_j) + (a_r, b_s)\right) + (a_m, b_n)$

   $= (a_i + a_r, b_j + b_s) + (a_m, b_n)$

   $= (a_i + a_r + a_m, b_j + b_s + b_n) \qquad (i)$

   $a + (b + c) = (a_i, b_j) + ((a_r, b_s) + (a_m, b_n))$

   $= (a_i, b_j) + (a_r + a_m, b_s + b_n)$

   $= (a_i + a_r + a_m, b_j + b_s + b_n) \qquad (ii)$

   jadi, berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh bahwa untuk setiap $a, b, c \in P$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$

   c. Terdapat $e \in P$ sehingga untuk setiap $a \in P$ berlaku $a + e = e + a = a$

   pilih $e = (0,0) \in P$ sehingga

   $a + e = (a_i, b_j) + (0,0)$

$= (a_i, b_j)$

$= a$

$e + a = (0,0) + (a_i, b_j)$

$= (a_i, b_j)$

$= a$

jadi, $e = (0,0) \in P$ adalah unsur identitas di P.

d. untuk setiap $a \in P$, terdapat $a^{-1} \in P$ sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$

diketahui $e = (0,0)$

$a + a^{-1} = e$

$\Leftrightarrow (a_i, b_j) + a^{-1} = (0,0)$

$\Leftrightarrow a^{-1} = (0,0) - (a_i, b_j)$

$\Leftrightarrow a^{-1} = (-a_i, -b_j)$

jadi, untuk setiap $a \in P$, terdapat $a^{-1} \in P$ sehingga

$$a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$$

e. untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b = b + a$

$a + b = (a_i, b_j) + (a_r, b_s)$

$= (a_i + a_r, b_j + b_s)$

$= (a_r + a_i, b_s + b_j)$

$= b + a$

jadi, untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b = b + a$

2. $(P, \cdot)$ semigrup

a. untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a \cdot b \in P$

$a \cdot b = (a_i, b_j) \cdot (a_r, b_s)$

$= (a_i a_r, b_j b_s)$

dengan $a_i a_r, b_j b_s \in \mathbb{Z}$

jadi, untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a \cdot b \in P$

b. untuk setiap $a, b, c \in P$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a \cdot b) \cdot c = \left((a_i, b_j)(a_r, b_s)\right)(a_m, b_n)$

$= (a_i a_r, b_j b_s)(a_m, b_n)$

$= (a_i a_r a_m, b_j b_s b_n)$ (i)

$a \cdot (b \cdot c) = (a_i, b_j)((a_r, b_s)(a_m, b_n))$

$= (a_i, b_j)(a_r a_m, b_s b_n)$

$= (a_i a_r a_m, b_j b_s b_n)$ (ii)

jadi, berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh bahwa untuk setiap $a, b, c \in P$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c. $(P, +, \cdot)$ distributif kanan dan kiri

untuk setiap $a, b, c \in P$, berlaku:

a. $(a + b)c = ac + bc$

$(a + b)c = \left((a_i, b_j) + (a_r, b_s)\right)(a_m, b_n)$

$= (a_i + a_r, b_j + b_s)(a_m, b_n)$

$= \left((a_i + a_r)a_m, (b_j + b_s)b_n\right)$

$= (a_i a_m + a_r a_m, b_j b_n + b_s b_n)$

$= (a_i a_m, b_j b_n) + (a_r a_m, b_s b_n)$

$= (a_i, b_j)(a_m b_n) + (a_r, b_s), (a_m, b_n)$

$= ac + bc$

b. $a(b + c) = ab + ac$

$a(b + c) = (a_i, b_j)((a_r, b_s) + (a_m, b_n)$

$= (a_i, b_j)(a_r + a_m, b_s + b_n)$

$= \big(a_i(a_r + a_m), b_j(b_s + b_n)\big)$

$= \big(a_i a_r + a_i a_m, b_j b_s + b_j b_n\big)$

$= \big(a_i a_r, b_j b_s\big) + (a_i a_m, b_j b_n)$

$= \big(a_i, b_j\big)(a_r, b_s) + (a_i, b_j)(a_m, b_n)$

$= ab + ac$

jadi, P adalah ring ■

Teorema 4.2
Jika $R = \oplus P_i$, d*engan* P_i *ideal dari* R, $i = 1,2, \dots, n$ *dengan:*
$Q_1 = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k_1}$
$Q_2 = P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \cdots + P_{k_1+k_2}$
$Q_3 = P_{k_1+k_2+1} + P_{k_1+k_2+2} + \cdots + P_{k_1+k_2+k_3}$

.
.
.
$Q_r = P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+2} + \cdots + P_n$
maka $R = \oplus Q_j, j = 1,2, \dots, r$.
Bukti

Diketahui $R = \oplus P_i$, dengan P_i ideal dari R, $i = 1,2, \dots, n$ dan

$Q_1 = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k_1}$

$Q_2 = P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \cdots + P_{k_1+k_2}$

$Q_3 = P_{k_1+k_2+1} + P_{k_1+k_2+2} + \cdots + P_{k_1+k_2+k_3}$

.

.

.

$Q_r = P_{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}+2} + \cdots + P_n$

akan dibuktikan $R = \oplus Q_j, j = 1,2, \ldots, r$.

karena $R = \oplus P_i$ maka berlaku:

$R = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$

$= P_1 + P_2 + \cdots + P_{k_1} + P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \cdots + P_{k_1+k_2} + P_{k_1+k_2+1} +$

$P_{k_1+k_2+2} + \cdots + P_{k_1+k_2+k_3} + \cdots + P_{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+2} +$

$\cdots + P_n$

$= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_r$ [tetap ideal di R, berdasarkan teorema 2.1]

$= \oplus Q_j$ ■

Contoh 4.4

Berdasarkan Contoh 4.2, $\mathbb{Z}_6 = \oplus P_i, i = 1,2,3,$.

Misal

$Q_1 = P_1 + P_2$

$= \{0\} + \{0,3\}$

$= \{0,3\}$

$Q_2 = P_3$

$= \{0,2,4\}$

akibatnya $\mathbb{R}^3 = \oplus Q_j, j = 1,2.$

Teorema 4.3(hartley dan hawkes, 1970:35)
Jika R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal $J_1, J_2, \ldots, J_n$, maka untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis secara tunggal bentuk

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

dengan $r_i \in J_i$

Bukti

Misalkan $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r_1' + r_2' + \cdots + r_n'$, dengan $r_i, r_i' \in J_i$. akan ditunjukkan $r_i = r_i'$.

perhatikan bahwa

$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r_1' + r_2' + \cdots + r_n'$

$\Leftrightarrow (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) - (r_1' + r_2' + \cdots + r_n') = 0$

$\Leftrightarrow (r_1 - r_1') + (r_2 - r_2') + \cdots + (r_n - r_n') = 0$

$\Leftrightarrow (r_1 - r_1') + (r_2 - r_2') + \cdots + (r_{i-1} - r_{i-1}') + (r_i - r_i') + (r_{i+1} - r_{i+1}') + \cdots + (r_n - r_n') = 0$

$\Leftrightarrow r_i - r_i' = -(r_1 - r_1') - (r_2 - r_2') - \cdots - (r_{i-1} - r_{i-1}') - (r_i - r_i') - (r_{i+1} - r_{i+1}') - \cdots - (r_n - r_n')$

$\Leftrightarrow r_i - r_i' = (r_1' - r_1) + (r_2' - r_2) + \cdots + (r_{i-1}' - r_{i-1}) + (r_i' - r_i) + (r_{i+1}' - r_{i+1}) + \cdots + (r_n' - r_n)$

karena $r_i, r_i' \in J_i$, maka $r_i - r_i' \in J_i$

selanjutnya karena $r_1' - r_1 \in J_1,\ r_2' - r_2 \in J_2, \ldots,\ r_{i-1}' - r_{i-1} \in J_{i-1},\ r_{r+1}' - r_{i+1} \in J_{i+1}, \ldots,\ r_n' - r_n \in J_n$, maka $\sum_{j \neq i}(r_j' - r_j) = r_i - r_i' \in \sum_{j \neq i} J_j$

perhatikan bahwa R merupakan jumlahan langsung internal, sehingga

$$J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$$

karena $r_i - r_i' \in J_i$ dan $r_i - r_i' \in \sum_{j \neq i} J_j$, akibatnya $r_i - r_i' \in J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$

sehingga diperoleh $r_i - r_i' = 0$

dengan bentuk lain $r_i = r_i'$.

Jadi, untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis secara tunggal bentuk $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$

dengan $r_i \in J_i$. ■

Contoh 4.5

Misal $\mathbb{Z}_6$ adalah ring, dan $r_1 = \{0\}, r_2 = \{0,3\}, r_3 = \{0,2,4\}$ adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_6$ secara tunggal dapat di bentuk

$r = r_1 + r_2 + r_3,\ r_1, r_2, r_3 \in J_i$ yaitu

$0 = 0 + 0 + 0$

$1 = 0 + 3 + 4$

$2 = 0 + 0 + 2$

$3 = 0 + 3 + 0$

$4 = 0 + 0 + 4$

$5 = 0 + 3 + 2$

Teorema 4.4(Hartley dan Hawkes, 1970:35)
Jika $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ untuk setiap $r \in R$ dengan $r_i \in J_i$ di mana J_i adalah ideal-ideal dari R dan R adalah jumlahan langsung internal dari J_i, dengan $\pi_i: R \to J_i$, adalah sebuah pemetaan, maka π_i epimorpisma.

Bukti

Perhatikan bahwa:

$\pi_i: R \to J_i$

$\pi_i(r_1 + r_2 + \cdots + r_i + \cdots + r_n) = r_i$

terdefinisi dengan jelas.

akan ditunjukkan π_i adalah sebuah epimorpisma.

1. Akan dibuktikan π_i homomorpisma ring

   Ambil $r, s \in R$ sebarang, tulis

   $r = (r_1 + r_2 + \cdots + r_i + \cdots + r_n),\ s = (s_1 + s_2 + \cdots + s_i + \cdots + s_n)$,dengan

   $r_i, s_i \in J_i,$

   $i = 1,2, \ldots , n$

   p erhatikan bahwa:

   $\pi_i(r + s) = \pi_i((r_1 + r_2 + \ldots + r_i + \cdots + r_n) + (s_1 + s_2 + \ldots + s_i + \cdots + s_n)\ )$

   $= \pi_i((r_1 + s_1) + (r_2 + s_2) + \ldots + (r_i + s_i) + \cdots + (r_n + s_n))$

   $= r_i + s_i$

   $= \pi_i(r_1 + r_2 + \cdots + r_i + \cdots + r_n) + \pi(s_1 + s_2 + \cdots + s_i + \cdots + s_n)$

   $= \pi_i(r) + \pi_i(s)$

   $\pi_i(r \cdot s) = \pi_i((r_1 + r_2 + \ldots + r_i + \cdots + r_n) \cdot (s_1 + s_2 + \ldots + s_i + \cdots + s_n)$

   $= \pi_i((r_1 s_1) + (r_2 s_2) + \ldots + (r_i s_i) + \cdots + (r_n s_n))$

   $= r_i s_i$

   $= \pi_i(r_1 + r_2 + \cdots + r_i + \cdots + r_n) \cdot \pi(s_1 + s_2 + \cdots + s_i + \cdots + s_n)$

   $= \pi_i(r) \cdot \pi_i(s)$

jadi, π_i homomorpisma ring

2. Akan dibuktikan π_i surjektif

   pilih $r_i \in J_i$ sebarang, sehingga untuk setiap $r \in R$,berlaku

   $\pi_i(r) = \pi_i(r_1 + r_2 + \cdots + r_i + \cdots + r_n)$

   $= r_i$

   jadi, π_i bersifat surjektif

berdasarkan 1 dan 2, π_i epimorpisma ring. ■

Contoh 4.6

Berdasarkan Contoh 4.5, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_6$ secara tunggal dapat di bentuk

$r = r_1 + r_2 + r_3,\ r_1, r_2, r_3 \in J_i$, salah satunya yaitu:

$0 = 0 + 0 + 0$

selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$\pi_1 : \mathbb{Z}_6 \to J_1$

$\pi_1(0 + 0 + 0) = 0$

π_1 epimorpisma

bukti:

perhatikan bahwa

a. $\pi_1\big((0 + 0 + 0) + (0 + 0 + 0)\big) = \pi_1\big((0 + 0) + (0 + 0) + (0 + 0)\big)$

$$= 0 + 0$$

$$= \pi_1(0 + 0 + 0) + \pi_1(0 + 0 + 0)$$

$\pi_1\big((0 + 0 + 0) \cdot (0 + 0 + 0)\big) = \pi_1\big((0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0)\big)$

$$= 0 \cdot 0$$

$$= \pi_1(0 + 0 + 0) \cdot \pi_1(0 + 0 + 0)$$

π_1 homomorpisma

b. ambil $0 \in J_1$ sehingga untuk $(0 + 0 + 0) \in \mathbb{Z}_6$ berlaku

$\pi_1(0 + 0 + 0) = 0$

π_1 surjektif

jadi, π_1 epimorpisma.

B. Pembahasan

Dalam penelitian yang berjudul penjumahan langsung pada modul oleh Yunita Wildanianti (2009) diperoleh kesimpulan tentang konsep dari penjumlahan langsung luar dan dalam pada modul, yaitu penjumlahan langsung luar adalah perkalian langsung dari kumpulan modul dan jumlahan langsung dalam adalah penjumlahan langsung dari kumpulan submodul yang memenuhi syarat tertentu. Sementara dalam penelitian ini didapatkan konsep dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal yaitu jumlahan langsung eksternal adalah hasil kali kartesian dari kumpulan ring $R_1, R_2, \ldots, R_n$ yang dinotasikan dengan $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$ yang telah di bahas dalam Definisi 4.1, jumlahan langsung internal adalah kumpulan dari ideal-ideal di R yang memenuhi $R = \sum_{i=1}^{n} J_i$, dan $J_i \cap \sum_{J \neq i} J_j = \{0\}$, untuk $i = 1, \ldots, n$, dimana J_i adalah ideal-ideal di R yang telah di bahas dalam Definisi 4.2.

Sebuah jumlahan langsung dari *S-near-ring* adalah *S-near-ring*, sebagaimana yang di jelaskan dalam penelitian yang berjudul hasil kali langsung *S-near-ring* dan *S-near-ring* bebas (Henry W.M Patti (2014). Hal ini menunjukkan bahwa sebuah jumlahan langsung dari suatu struktur aljabar tertentu adalah struktur aljabar itu sendiri. Hal ini memotivasi terbentuknya Teorema 4.1. Dalam penelitian Yunita wildaniyanti (2009) juga membahas teorema yang isinya menunjukan bahwa jumlahan langsung internal dari submodul-submodul katakan M yang apabila jumlah dari tiap submodul merupakan jumlah dari submodul-submodul lain maka M juga merupakan jumlahan langsung internal dari submodul-submodul lain tersebut. Hal ini memotivasi terbentuknya Teorema 4.2.

Selain itu, dalam penelitian ini juga ditunjukkan bahwa bentuk $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, dengan $r_i \in J_i$ hanya dapat ditulis secara tunggal untuk setiap $r \in R,$ di mana R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal nya yaitu $J_i, i = 1,2, \dots, n$ yang telah dibahas dalam Teorema 4.3. Notasi yang digunakan pada Teorema 4.3 mengakibatkan pemetaan dari R ke J_i epimorpisma sebagaimana yang di bahas dalam Teorema 4.4.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian disimpulkan beberapa hal berkaitan dengan rumusan masalah yaitu :

1. Jumlahan langsung pada ring terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Jumlahan langsung eksternal adalah hasil kali kartesian dari kumpulan ring $R_1, R_2, \ldots, R_n$ yang dinotasikan dengan $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$. Jumlahan langsung internal adalah kumpulan dari ideal-ideal di R yang memenuhi $R = \sum_{i=1}^{n} J_i$, dan $J_i \cap \sum_{J \neq i} J_j = \{0\}$, untuk $i = 1, \ldots, n$, dimana J_i adalah ideal-ideal di R.
2. Sifat-sifat jumlahan langsung pada ring meliputi:

i. Jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring

ii. Jika $R = \oplus P_i$, dengan P_i ideal dari R, dengan $Q_1 = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k_1}$, $Q_2 = P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \cdots + P_{k_1+k_2}$, ..., $Q_n = P_{k_1+k_2+1} + P_{k_1+k_2+2} + \cdots + P_n$ maka $R = \oplus Q_i$

iii. Jika R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal $J_1, J_2, \ldots, J_n$ maka untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis secara tunggal bentuk $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, dengan $r_i \in J_i$.

iv. Jika $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ untuk setiap $r \in R$ dengan $r_i \in J_i$ di mana J_i adalah ideal-ideal dari R dan R adalah jumlahan langsung internal dari J_i, dengan $\pi_i: R \to J_i$ adalah sebuah pemetaan , maka π_i epimorpisma.

B. Saran

Penelitian ini hanya membahas jumlahan langsung pada ring secara umum, begitupun dengan sifat-sifatnya. Sehingga bisa dilakukan penelitian selanjutnya yang lebih khusus seperti penelitian pada ring faktor.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B, dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra.* Cambridge University Press: Inggris

Dewi, Nurmala R. 2013. *Polinomial atas Ring*. Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi/Matematika. Malang:Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 2004. *Abstract Algebra.* Laurie Rosatone: United States of America

Gallian, Joseph A. 2017. *Contemporary Abstract Algebra.* Cengage Learning: United States of America

Khotimah, husnul. 2012. *Penerapan lemma Goursat pada Grup Direct Product Rank Dua.* Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi/Matematika. Malang:Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Patti, Henry W.M, (2014). Hasil Kali Langsung S-Near-Ring dan S-Near-Ring Bebas. *Jurnal Barekang,* 8, 1-7

Setiawan, Adi. 2014. *Dasar-dasar Ajabar Modern : Teori Grup dan Ring*. Salatiga : Tisara Grafika

Suryanti, Sri. 2018. *Teori Ring.* Gresik : UGM Press

Tahmir, Suradi. 2004. *Teori Grup.* Makassar: Andira Publisher.

Tahmir, Suradi. 2018. *Struktur Aljabar.* Makassar: Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar.

Wahyuni, Sri., dkk. 2016. *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Wildanianti, Yunita. 2009. *Penjumlahan Langsung pada Modul*. Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi/Matematika. Malang:Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

RIWAYAT HIDUP

ANNISA UNIARTI. Lahir di Kayuadi, 05 Agustus 1999 dari pasangan Daeng Silajak dan Agustina. Penulis memulai pendidikan di SD Negeri Tangnga-tangnga di Desa Batang Kecamatan Takabonerate pada tahun 2004-2010, kemudian melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Takabonerate pada tahun 2010-2013, pada tahun itu pula penulis melanjutkan pendidikan di SMAN 1 Takabonerate hingga 2016, lalu ditahun tersebut penulis di terima di Jurusan Matematika FMIPA UNM dan menyelesaikan studi pada tahun 2019.