



**SKRIPSI**

**DESKRIPSI KEMAMPUAN PEMAHAMAN KONSEP TURUNAN  
BERDASARKAN TEORI APOS PADA SISWA  
KELAS XII MIA-1 SMAN 2 MAKASSAR**

**DWI FITRIANI ROSALI**

**1411042003**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR  
2019**



**SKRIPSI**

**DESKRIPSI KEMAMPUAN PEMAHAMAN KONSEP TURUNAN  
BERDASARKAN TEORI APOS PADA SISWA  
KELAS XII MIA-1 SMAN 2 MAKASSAR**

*Diajukan kepada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar  
untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar  
Sarjana Pendidikan Matematika*

**DWI FITRIANI ROSALI**

**1411042003**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR  
2019**

# PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi atas nama Dwi Fitriani Rosali, NIM : 1411042003 dengan judul Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar, diterima oleh Panitia Ujian Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar, dengan SK. No. 5293/UN36.1/PP/2018, Tanggal 26 Desember 2018 untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Pend. Matematika pada Jurusan Matematika pada Hari Jumat, Tanggal 11 Januari 2019.

Disahkan Oleh:

Dekan FMIPA UNM Makassar

Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.

NIP. 19620417 198803 1 001

Panitia Ujian:

1. Ketua Ujian : Drs. Suwardi Annas, M.Si., Ph.D. (.....)
2. Sekretaris : Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd. (.....)
3. Pembimbing I : Dr. Ahmad Talib, M.Si. (.....)
4. Pembimbing II : Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd. (.....)
5. Penguji I : Dr. Awi, M.Si. (.....)
6. Penguji II : Nasrullah, S.Pd., M.Pd. (.....)

## **PERNYATAAN KEASLIAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk telah saya nyatakan dengan benar. Apabila kemudian hari ternyata pernyataan saya terbukti tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan oleh FMIPA UNM.

-----

Yang membuat pernyataan :

Nama : Dwi Fitriani Rosali

NIM : 1411042003

Tanggal : Januari 2019

## PERSETUJUAN PUBLIKASI UNTUK KEPERLUAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademika UNM Makassar, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Dwi Fitriani Rosali  
NIM : 1411042003  
Program Studi : Pendidikan Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Negeri Makassar **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (Non-exclusive Royalty-Free Right)** atas skripsi saya yang berjudul:

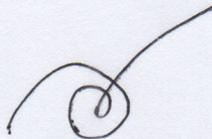
**“Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makasar”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non-eksklusif ini, Universitas Negeri Makassar berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta, serta tidak dikomersilkan.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

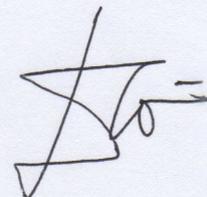
Dibuat di : Makassar  
Pada tanggal : Januari 2019

Menyetujui,  
Pembimbing I



**Dr. Ahmad Talib, M. Si.**  
NIP. 19660327 199003 1 003

Yang menyatakan,



**Dwi Fitriani Rosali**  
NIM. 1411042003

## MOTTO

**“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”**

*Q.S Al-Baqarah:286*

**“Tidak ada kesuksesan melainkan dengan pertolongan Allah”**

*Q.S Hud:88*

**“The best pleasure in life is doing what people say you cannot do”**

*“Mulailah dari tempatmu berada. Gunakan yang kau punya. Lakukan yang kau bisa”*

*Arthur Ashe*

*“Bila kau cemas dan gelisah akan sesuatu, masuklah ke dalamnya sebab ketakutan menghadapinya lebih mengganggu daripada sesuatu yang kau takuti sendiri”*

*Ali bin Abi Thalib*

## PERSEMBAHAN

**Persembahan untuk:**

*Kedua orang tuaku*

*Ayahanda Alimuddin Caco dan Ibunda Rosmaniar*

atas semua dukungan, perhatian, pengorbanan, dan do'a tulus yang diberikan untuk menunjang kesuksesanku dalam menggapai cita-cita

## ABSTRAK

**Dwi Fitriani Rosali. 2019.** Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Makassar. Dibimbing oleh Dr. Ahmad Talib, M.Si. dan Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui gambaran kemampuan pemahaman konsep turunan berdasarkan teori APOS. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan subjek sebanyak 6 siswa dari kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar tahun ajaran 2018/2019 yang dipilih dengan tujuan tertentu, yaitu nilai siswa dan rekomendasi guru. Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah tes kemampuan matematika siswa, tes pemahaman konsep turunan berdasarkan teori APOS, dan pedoman wawancara. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) Siswa yang memiliki kemampuan tinggi memenuhi indikator pemahaman konsep pada tahap aksi, serta memenuhi semua indikator pemahaman konsep pada tahap proses dan objek. Namun, pada tahap skema, siswa hanya memenuhi 1 indikator pemahaman konsep; (2) Siswa yang memiliki kemampuan sedang memenuhi indikator pemahaman konsep pada tahap aksi dan memenuhi 1 indikator pemahaman konsep pada tahap proses, serta memenuhi semua indikator pemahaman konsep pada tahap objek. Namun, pada tahap skema, siswa tidak memenuhi indikator pemahaman konsep; (3) Siswa yang memiliki kemampuan rendah memenuhi indikator pemahaman konsep pada tahap aksi, serta memenuhi semua indikator pemahaman konsep pada tahap proses. Namun, siswa tidak memenuhi indikator pemahaman konsep pada tahap objek dan skema.

**Kata Kunci:** Pemahaman Konsep, Teori APOS, Turunan.

## ABSTRACT

**Dwi Fitriani Rosali. 2019.** Description of the Ability in Understanding Derivative Concepts Based on APOS Theory of Students Class XII MIA-1 in SMAN 2 Makassar. Thesis. Mathematics Department. Faculty of Mathematic and Natural Science. State University of Makassar. Supervised by Dr. Ahmad Talib, M.Si. and Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd.

This research aims to describe the ability in understanding derivative concepts based on APOS theory. This research was a qualitative descriptive with the subjects were 6 students from class XII MIA-1 in SMAN 2 Makassar in 2018/2019 academic year which selected for certain purposes, namely students score and teacher recommendations. The instruments used in this research were a test of students' mathematics ability, test in understanding the derivative concepts based on APOS theory, and interviews. The results of the research showed that: (1) the students who have the high ability have fulfilled the indicators of understanding concept at the stage of action, and they fulfilled all indicators of understanding concepts in process and object stages. However, at the schema stage, the students only met 1 indicator of understanding the concept; (2) students who have the average ability have fulfilled the indicators of understanding concept at the action phase, and they fulfilled 1 indicator of understanding concept in the process phase, also they met all the indicators of understanding concepts in the object phase. However, at the schema phase, the students did not meet indicator of understanding concepts; (3) students who have the low ability have fulfilled the indicators of understanding concept at the stage of action, and they fulfilled all indicators of understanding concepts at the process stage. However, the students did not meet the indicator of understanding concepts at the object and schema stage.

**Keywords:** Understanding the Concept, APOS Theory, Derivative.

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Puji dan syukur kehadiran Allah *subhanahu wata'ala* kita memuji-Nya, memohon pertolongan-Nya, dan meminta ampunan kepada-Nya. Aku bersaksi bahwa tiada ilah yang berhak diibadahi kecuali hanya Allah semata, tidak ada sekutu bagi-Nya dan aku bersaksi bahwa Muhammad adalah hamba dan utusan-Nya. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad *shallallahu 'alaihi wasallam*, keluarga, sahabat-sahabatnya, tabi'in dan orang-orang yang senantiasa istiqamah dalam perjalanannya.

Alhamdulillah dengan pertolongan-Nya, akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "*Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar*" yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Makassar.

Penulis menyadari bahwa karya ini bukanlah semata hasil usaha pribadi penulis, melainkan Allah-lah dzat yang memberi petunjuk. Melalui kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada semua pihak atas segala bantuan yang diberikan selama ini, terutama kepada Bapak **Dr. Ahmad Talib, M.Si** selaku pembimbing I dan Bapak **Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd** selaku pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberi arahan, motivasi, nasehat, dukungan, serta bimbingannya setiap saat

dengan penuh kesabaran dan ketulusan kepada penulis, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dan layak untuk dibaca.

Ucapan terima kasih teristimewa penulis haturkan kepada Ayahanda **Dr. Alimuddin Caco, M.Sn** dan Ibunda **Rosmaniar, S.Pd., M.Pd** yang telah merawat, membesarkan, dan mencurahkan segala kasih dan sayangnya, yang senantiasa membimbing, menasehati, dan telah memberikan segala yang terbaik buat Ananda baik berupa dorongan moriil dan materiil serta doa tulusnya, “*syukron jazaakumullahu khairan, wa barakallahu fiikum*”.

Dalam kerendahan hati, penulis juga menyampaikan banyak terima kasih yang mendalam dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Ayahanda **Prof. Dr. H. Husain Syam, M.TP.**, Rektor Universitas Negeri Makassar.
2. Ayahanda **Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNM.
3. Ayahanda **Dr. Awi Dassa, M.Si.**, Ketua Jurusan Matematika dan Ayahanda **Sutamrin, S.Si., M.Si.**, Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNM.
4. Ayahanda **Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd.**, Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA UNM.
5. Ayahanda **Dr. Ahmad Talib, M.Si** sebagai pembimbing I dan Ayahanda **Dr. Asdar, S.Pd., M.Pd** sebagai pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan memberikan ilmu untuk membimbing penulis selama perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini.

6. Ayahanda **Dr. Awi Dassa, M.Si** dan Ayahanda **Nasrullah, S.Pd., M.Pd** sebagai tim penguji sekaligus sebagai tim validator yang telah memberikan ilmu dan masukan-masukan kepada penulis.
7. Ayahanda **Syahrullah Asyari, S.Pd., M.Pd** sebagai penasehat akademik yang telah memberikan arahan, nasehat, motivasi, dan ilmu kepada penulis selama mengikuti proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNM yang telah memberikan arahan, motivasi, dan ilmu kepada penulis selama mengikuti proses perkuliahan.
9. Ibu **Nursakiah, S.Si., S.Pd., M.Pd** dan Bapak **Muhammad Rizal, S.E** sebagai staf administrasi, serta Ibu **Hj. Sumra** sebagai pegawai perpustakaan jurusan matematika.
10. Bapak **Drs. H. Muh. Asrar, M.Pd.I**, Kepala SMA Negeri 2 Makassar dan Bapak **Drs. Kamo** sebagai guru bidang studi matematika SMA Negeri 2 Makassar, serta staf SMA Negeri 2 Makassar yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis melakukan penelitian. Begitupula kepada siswa-siswi kelas XII MIA-1 SMA Negeri 2 Makassar yang telah bersedia menjadi subjek penelitian.
11. Ayahanda **Dr. Alimuddin Caco, M.Sn**, Ibunda **Rosmaniar, S.Pd., M.Pd**, Kakanda **Suryarahma Rosali, S. Pd**, Adinda **Ahmad Salman Rosali**, dan Adinda **Ikhtiar Gympasca Rosali**, serta seluruh keluarga besar penulis yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang telah memberikan dukungan, perhatian, motivasi, dan kasih sayang.

12. Sahabat tercinta dan terkasih penulis sejak bangku sekolah Sitti Aisyah Jusmadil, Andi Hawaisah Putri, Syahriah Ramadhani Syahrir, Vikra Mudiah Munatzir, Anisa Mulya, dan Nur Asmi Mutiah yang telah berbagi segalanya, siap sedia dalam memberikan bantuan, motivasi dan dukungan kepada penulis selama ini, serta senantiasa bersama penulis dalam suka dan duka.
13. Sahabat tercinta dan seperjuangan penulis Yusuf Ramadana, Fatimah Akbal, Hasanatul Munadiah, Syarifatunnisa, dan Sulfiana Use yang telah memberikan bantuan, motivasi, dan dukungan selama kuliah, serta senantiasa bersama penulis dalam suka dan duka.
14. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2014 (Faktor14l), terkhusus teman-teman Pendidikan Matematika Reguler Angkatan 2014 (MED14N) yang telah memberikan ilmu dan motivasi.
15. Keluarga besar LABKOMMAT yang telah memberikan ilmu dan motivasi, serta pengalaman yang luar biasa selama perkuliahan, terkhusus kepada Rahmah, Utty, Rusdi, Kiki, Lu'lu, Fifit, Padha, Titin, Yusmar, Fira, Saadah, Asman, Nahdi, Hadi.
16. Teman-teman seperjuangan penulis selama berada di pondok Angkatan 22 (TGX-FIMVATION) yang telah memberikan bantuan, pengalaman yang luar biasa, dan motivasi.
17. Teman-teman KKN-PPM Kabupaten Pinrang, terspesial kepada Ammassangang Berjaya.
18. Teman-teman PPL SMK Negeri 1 Makassar.

19. Seluruh kakanda, teman-teman, dan adinda di Jurusan Matematika FMIPA UNM yang telah memberikan semangat agar dapat menyelesaikan studi.
20. Seluruh pihak yang tidak sempat penulis sebutkan yang telah memberi saran dan kritik, serta dukungannya selama ini, terima kasih untuk semuanya.

Akhirnya, penulis menyerahkan segalanya kepada Allah *subhanahu wata'ala*, semoga amal baik mereka yang telah mengulurkan tangannya diridhai oleh Allah *subhanahu wata'ala*. Aamiin Yaa Rabbal Alamiin.

Makassar, Januari 2019

**Dwi Fitriani Rosali**

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>PENGESAHAN SKRIPSI</b> .....	ii
<b>PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	iii
<b>PERSETUJUAN PUBLIKASI</b> .....	iv
<b>MOTTO</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vi
<b>ABSTRACT</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Rumusan Masalah .....	5
C. Tujuan Penelitian .....	5
D. Manfaat Penelitian .....	6
E. Batasan Istilah .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	9
A. Hakikat Matematika .....	9
B. Pemahaman Konsep Matematika .....	11
C. Materi Turunan .....	17

D. Konsep Teori APOS.....	29
E. Penelitian yang Relevan.....	34
F. Kerangka Pikir .....	36
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>42</b>
A. Jenis Penelitian.....	42
B. Waktu dan Tempat Penelitian .....	42
C. Subjek Penelitian.....	42
D. Instrumen Penelitian.....	44
E. Tahap-Tahap Penelitian .....	46
F. Teknik Pengumpulan Data.....	49
G. Tahap Analisis Data .....	50
H. Pengecekan Keabsahan Data.....	52
<b>BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>54</b>
A. Hasil Pemilihan Subjek .....	55
B. Hasil Penelitian .....	57
1. Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Siswa Berdasarkan Teori APOS .....	57
2. Klasifikasi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Siswa Berdasarkan Teori APOS .....	118
C. Pembahasan.....	123
1. Tahap Aksi .....	124
2. Tahap Proses .....	125
3. Tahap Objek .....	127
4. Tahap Skema.....	130

<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	136
A. Kesimpulan .....	136
B. Saran.....	137
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	138
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Pengelompokan Siswa Berdasarkan Kemampuan Matematika.....	49
Tabel 4.1	Daftar Nilai Siswa Berdasarkan Kemampuan Matematika Siswa pada Materi Turunan.....	55
Tabel 4.2	Subjek Terpilih .....	56
Tabel 4.3	Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Tinggi .....	118
Tabel 4.4	Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Tinggi .....	120
Tabel 4.5	Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Sedang .....	120
Tabel 4.6	Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Sedang .....	121
Tabel 4.7	Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Rendah .....	122
Tabel 4.8	Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Rendah.....	123
Tabel 4.9	Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Aksi .....	125
Tabel 4.10	Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Proses ....	127
Tabel 4.11	Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Objek.....	130
Tabel 4.12	Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Skema....	134

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema APOS .....	31
Gambar 2.2	Kerangka Pikir Penelitian.....	41
Gambar 4.1	Jawaban Subjek S1a-T1a.....	58
Gambar 4.2	Jawaban Subjek S1b-T1a .....	60
Gambar 4.3	Jawaban Subjek S2a-T1a.....	61
Gambar 4.4	Jawaban Subjek S2b-T1a .....	63
Gambar 4.5	Jawaban Subjek S3a-T1a.....	65
Gambar 4.6	Jawaban Subjek S3b-T1a .....	66
Gambar 4.7	Jawaban Subjek S1a-T1b .....	68
Gambar 4.8	Jawaban Subjek S1b-T1b .....	69
Gambar 4.9	Jawaban Subjek S2a-T1b .....	71
Gambar 4.10	Jawaban Subjek S2b-T1b .....	72
Gambar 4.11	Jawaban Subjek S3a-T1b .....	73
Gambar 4.12	Jawaban Subjek S3b-T1b .....	74
Gambar 4.13	Jawaban Subjek S1a-T2 .....	76
Gambar 4.14	Jawaban Subjek S1b-T2 .....	78
Gambar 4.15	Jawaban Subjek S2a-T2 .....	81
Gambar 4.16	Jawaban Subjek S2b-T2 .....	83
Gambar 4.17	Jawaban Subjek S3a-T2 .....	85
Gambar 4.18	Jawaban Subjek S3b-T2 .....	88

Gambar 4.19	Jawaban Subjek S1a-T3 .....	90
Gambar 4.20	Jawaban Subjek S1b-T3 .....	93
Gambar 4.21	Jawaban Subjek S2a-T3 .....	96
Gambar 4.22	Jawaban Subjek S2b-T3 .....	99
Gambar 4.23	Jawaban Subjek S3a-T3 .....	102
Gambar 4.24	Jawaban Subjek S3b-T3 .....	104
Gambar 4.25	Jawaban Subjek S1a-T4 .....	106
Gambar 4.26	Jawaban Subjek S1b-T401 .....	109
Gambar 4.27	Jawaban Subjek S1b-T402 .....	110
Gambar 4.28	Jawaban Subjek S2a-T4 .....	112
Gambar 4.29	Jawaban Subjek S3b-T4 .....	116
Gambar 4.30	Jawaban Subjek Tahap Aksi.....	124
Gambar 4.31	Jawaban Subjek Tahap Proses.....	125
Gambar 4.32	Jawaban Subjek Tahap Objek .....	128
Gambar 4.33	Jawaban Subjek Tahap Skema .....	131

## **DAFTAR LAMPIRAN**

### **LAMPIRAN A INSTRUMEN PENELITIAN**

- A.1 Kisi-Kisi Tes Kemampuan Matematika
- A.2 Tes Kemampuan Matematika
- A.3 Kisi-Kisi Tes Pemahaman Konsep
- A.4 Tes Pemahaman Konsep
- A.5 Pedoman Wawancara

### **LAMPIRAN B HASIL TES SUBJEK PENELITIAN**

- B.1 Hasil Tes Kemampuan Matematika Siswa
- B.2 Hasil Tes Pemahaman Konsep Subjek Terpilih
- B.3 Hasil Wawancara Subjek Terpilih

### **LAMPIRAN C VALIDASI INSTRUMEN**

- C.1 Lembar Hasil Validasi Instrumen dari Validator I
- C.2 Lembar Hasil Validasi Instrumen dari Validator II

### **LAMPIRAN D ADMINISTRASI DAN PERSURATAN**

- D.1 Surat Pengajuan Judul Skripsi
- D.2 Surat Persetujuan Seminar Proposal
- D.3 Surat Keterangan Validasi Instrumen
- D.4 Surat Penelitian I (Fakultas MIPA)
- D.5 Surat Penelitian II (Dinas Penanaman Modal)
- D.6 Surat Penelitian III (Dinas Pendidikan Provinsi Sulawesi Selatan)
- D.7 Surat Keterangan Penelitian
- D.8 Surat Persetujuan Seminar Hasil Penelitian
- D.9 Surat Persetujuan Ujian Skripsi

### **LAMPIRAN E DOKUMENTASI PENELITIAN**

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **A. Latar Belakang Masalah**

Matematika merupakan ilmu *universal* yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin dan mengembangkan daya pikir manusia. Perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidangnya masing-masing. Untuk menguasai dan mencipta teknologi di masa depan diperlukan pembelajaran matematika yang kuat sejak dini (Sholihah dan Mubarak, 2016).

Pembelajaran matematika tidak hanya berkaitan dengan keterampilan dalam menghitung dan menghafalkan rumus matematika sebanyak-banyaknya, namun juga harus memahami konsepnya. Belajar matematika dengan pemahaman konsep memerlukan daya nalar yang tinggi dikarenakan objek matematika yang bersifat abstrak, sehingga belajar matematika harus diarahkan pada pemahaman konsep-konsep yang akan mengantarkan individu untuk berpikir secara matematis dengan jelas dan pasti berdasarkan aturan-aturan yang logis dan sistematis (Hudojo, 1993).

Pembelajaran matematika harus dihayati dan ditekankan untuk menanamkan konsep matematika berdasarkan pemahaman, karena pemahaman merupakan kemampuan untuk menangkap makna dan arti dari bahan yang dipelajari, sehingga pemahaman memudahkan terjadinya transfer (Hiebert dan Carpenter, 1992). Pencapaian pemahaman suatu konsep matematika bukan suatu

hal yang mudah dikarenakan kemampuan dalam memahami suatu konsep matematika setiap individu berbeda-beda.

Menurut Depdiknas (2006), pentingnya pemahaman konsep matematika berada dalam tujuan pertama pembelajaran matematika yaitu memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika di atas, maka setelah proses pembelajaran siswa diharapkan dapat memahami suatu konsep matematika sehingga dapat menggunakan kemampuan tersebut dalam menghadapi masalah-masalah matematika.

Menurut Sanjaya (2009) pemahaman konsep adalah kemampuan siswa berupa penguasaan sejumlah materi pelajaran, dimana siswa tidak sekedar mengetahui atau mengingat sejumlah konsep yang dipelajari, tetapi mampu mengungkapkan kembali dalam bentuk lain yang mudah dimengerti, memberikan interpretasi data dan mampu mengaplikasikan konsep yang sesuai dengan struktur kognitif yang dimilikinya. Pemahaman bukan hanya sekedar mengingat fakta, akan tetapi berkenaan dengan kemampuan menjelaskan, menerangkan, menafsirkan atau kemampuan menangkap makna atau arti suatu konsep.

Pemahaman konsep matematika dapat membantu siswa dalam belajar matematika. Menurut Sholihah dan Mubarak (2016), pada setiap pembelajaran diusahakan lebih ditekankan pada pemahaman konsep agar siswa memiliki bekal dasar yang baik untuk mencapai kemampuan dasar yang lain seperti penalaran, komunikasi, koneksi, dan pemecahan masalah. Dengan kemampuan dasar siswa,

maka siswa tersebut telah memahami konsep dari suatu pelajaran meskipun penjelasan yang diberikan mempunyai susunan kalimat yang tidak sama dengan konsep yang diberikan tetapi maksudnya sama.

Salah satu konsep dasar dalam matematika adalah konsep turunan (Firouzian, 2013). Menurut Park (2012), konsep turunan merupakan konsep yang sangat penting untuk memahami topik-topik lanjutan seperti integral. Selain sebagai konsep dasar atau ide kunci dalam matematika utamanya dalam lingkup kalkulus, konsep turunan juga dapat dijadikan alat untuk menyelesaikan berbagai permasalahan seperti dalam bidang fisika, ekonomi, dan sebagainya. Oleh karena itu, memiliki pemahaman yang kuat tentang konsep turunan merupakan hal yang sangat penting (Shatila, Habre & Osta, 2016).

Namun kenyataan yang ditemukan di lapangan, tepatnya di SMAN 2 Makassar diperoleh bahwa siswa tidak memiliki kesiapan individu dalam memahami konsep secara mendalam, terkhusus pada materi turunan dikarenakan mereka terbiasa menerima berbagai macam rumus dan menghafalkan rumus tersebut sehingga dalam mengaitkan antara konsep yang satu dengan yang lainnya masih sangat sulit. Akibatnya siswa biasanya kesulitan dalam menyelesaikan soal, walaupun soal yang diberikan memiliki kaitan dengan konsep yang telah diajarkan sebelumnya. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman konsep turunan yang dimiliki oleh siswa masih sangat lemah. Selain itu, kenyataan ini tidak sejalan dengan pengertian pemahaman konsep matematika yang merupakan hasil konstruksi atau rekonstruksi terhadap objek-objek matematika dimana konstruksi atau rekonstruksi tersebut dilakukan melalui aktivitas berupa aksi matematika,

proses, objek yang diorganisasikan dalam suatu skema untuk memecahkan suatu permasalahan (Asiala, *et al*, 1997).

Asiala, *et al* (1997) mengemukakan suatu teori untuk mempelajari bagaimana seseorang belajar konsep matematika. Teori ini disebut teori APOS (*Action, Process, Object*, dan *Schema*). Dubinsky & McDonald (2001) menyatakan bahwa teori APOS adalah suatu teori belajar yang menguraikan tentang bagaimana kegiatan mental seorang anak yang berbentuk aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*) ketika mengkonstruksi konsep matematika.

Teori APOS dapat digunakan sebagai suatu alat untuk mendeskripsikan perkembangan skema seseorang pada suatu topik matematika yang merupakan totalitas suatu pengetahuan yang saling terkait (secara sadar atau tidak sadar) terhadap topik tersebut sehingga dapat digunakan untuk menginterpretasikan tahap pemahaman siswa melalui empat tahap, yaitu tahap aksi, tahap proses, tahap objek, dan tahap skema. Oleh karena itu, untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa terhadap konsep matematika dibutuhkan suatu pemecahan permasalahan yaitu melalui teori APOS (Asiala, *et al*, 1997).

Suryadi (2011) menjelaskan teori APOS adalah sebuah konstruktivisme tentang bagaimana seseorang belajar memahami konsep matematika. Pembelajaran dengan menggunakan teori APOS menekankan pada perolehan pengetahuan melalui konstruksi mental. Konstruksi mental dalam teori APOS adalah terbentuknya aksi, yang direnungkan menjadi proses, selanjutnya dirangkum menjadi objek, objek dapat diuraikan kembali menjadi proses. Akhirnya aksi,

proses, dan objek dapat diorganisasikan menjadi suatu skema untuk memecahkan masalah matematika.

Kerangka teori APOS sangat berguna dalam mendeskripsikan kemampuan pemahaman siswa dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Teori APOS digunakan untuk mengetahui tahap pemahaman siswa terhadap suatu topik matematika. Berdasarkan uraian di atas, perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai **Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Berdasarkan Teori APOS**. Dalam penelitian ini, peneliti memfokuskan kemampuan pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS.

## **B. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka masalah pada penelitian ini adalah bagaimana deskripsi kemampuan pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS?

## **C. Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui dan memberikan gambaran tentang kemampuan pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS.

#### **D. Manfaat Penelitian**

Penelitian yang dilakukan diharapkan dapat memberikan manfaat dalam dunia pendidikan, terkhusus pendidikan matematika. Adapun manfaat yang diperoleh setelah dilakukannya penelitian ini antara lain:

##### 1. Bagi Siswa

Memberikan motivasi kepada siswa dalam meningkatkan dan memperdalam kemampuan pemahaman konsep matematika siswa, terkhusus pada materi turunan. Selain itu, siswa juga akan mengetahui sejauh mana kemampuan pemahaman konsep matematika yang mereka miliki.

##### 2. Bagi Guru

Memberikan informasi kepada para guru matematika tentang keadaan dan pola pikir siswa dalam mencerna materi yang telah dipelajari oleh siswa sehingga dapat membimbing siswa dalam kegiatan pembelajaran. Begitu pula, guru matematika akan lebih mudah dalam memilih strategi pembelajaran sehingga proses pembelajaran dapat berjalan dengan lancar.

##### 3. Bagi Sekolah

Meningkatkan mutu sekolah melalui peningkatan rasa percaya diri siswa dalam memahami konsep matematika yang dapat bermuara pada peningkatan prestasi siswa dan prestasi sekolah.

##### 4. Bagi Peneliti

Sebagai wadah dalam menyelesaikan tugas akhir kuliah serta sebagai sarana untuk melatih kemampuan sebelum menjadi seorang pendidik yang baik sehingga dapat menjadi panutan nantinya.

## 5. Bagi Peneliti Lain

Sebagai bahan rujukan dan referensi bagi para peneliti selanjutnya dalam melakukan penelitian yang sejenis ataupun pengembangan terhadap topik-topik lainnya.

### **E. Batasan Istilah**

Batasan istilah pada penelitian ini disusun untuk menghindari penafsiran yang berbeda terhadap istilah yang digunakan sehingga perlu diberikan batasan istilah sebagai berikut.

1. Deskripsi yang dimaksud dalam penelitian ini adalah uraian, gambaran, atau pemaparan mengenai kemampuan pemahaman konsep turunan siswa.
2. Pemahaman konsep siswa yang dimaksud pada penelitian ini adalah kemampuan siswa dalam memahami konsep atau materi yang telah dipelajari sehingga siswa mampu menyelesaikan soal yang diberikan dengan benar dan tepat. Adapun indikator yang digunakan dalam penelitian ini adalah kemampuan menyatakan ulang sebuah konsep; kemampuan mengidentifikasi serta mengklasifikasikan objek menurut sifat-sifat tertentu; kemampuan menyajikan konsep ke dalam bentuk tertentu; kemampuan menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu dengan tepat; serta kemampuan mengaplikasikan konsep ke pemecahan masalah.
3. Teori APOS pada penelitian ini digunakan untuk mengetahui atau menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep, yang terdiri atas tahap aksi, proses, objek, dan skema.

4. Ruang lingkup terkait konsep atau materi matematika yang dimaksud pada penelitian ini mencakup konsep turunan yang difokuskan pada materi turunan fungsi aljabar.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

#### **A. Hakikat Matematika**

Matematika merupakan ide-ide (gagasan-gagasan), struktur-struktur, dan hubungannya diatur secara logik sehingga matematika berkaitan dengan konsep-konsep abstrak. Menurut Suherman (2003), matematika adalah bahasa simbol; matematika adalah bahasa numerik; matematika adalah bahasa yang dapat menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional; matematika adalah metode berpikir logis; matematika adalah sarana berpikir; matematika adalah logika pada masa dewasa; matematika adalah ratunya ilmu sekaligus menjadi pelayannya; matematika adalah sains mengenai kuantitas dan besaran; matematika adalah suatu sains yang bekerja menarik kesimpulan-kesimpulan yang perlu; matematika adalah sains formal yang murni; matematika adalah sains yang memanipulasi simbol; matematika adalah ilmu tentang bilangan dan ruang; matematika adalah ilmu yang mempelajari hubungan pola, bentuk, struktur; matematika adalah ilmu yang abstrak dan deduktif; serta matematika adalah aktivitas manusia.

Menurut Theresia (1992), ada beberapa karakteristik matematika yang perlu diketahui, diantaranya sebagai berikut:

1. Objek yang dipelajari bersifat abstrak

Sebagian besar yang dipelajari dalam matematika adalah angka atau bilangan yang secara nyata tidak ada atau merupakan hasil pemikiran otak manusia. Beberapa diantaranya yaitu: (1) konsep, yaitu suatu ide abstrak yang digunakan

untuk menggolongkan sekumpulan objek; (2) prinsip, yaitu suatu objek matematika yang kompleks; (3) operasi, yaitu pengerjaan hitungan, pengerjaan aljabar, dan pengerjaan matematika lainnya seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, gabungan, irisan, dan sebagainya.

## 2. Kebenarannya berdasarkan logika

Kebenaran dalam matematika adalah kebenaran secara logika bukan empiris. Artinya kebenaran itu tidak dapat dibuktikan melalui eksperimen seperti dalam ilmu fisika atau biologi.

## 3. Pembelajarannya secara bertingkat dan kontinu

Pemberian materi matematika disesuaikan dengan tingkatan pendidikan dan dilakukan secara terus-menerus.

## 4. Ada keterkaitan antara materi yang satu dengan yang lainnya

Dalam matematika, untuk dapat menguasai suatu materi seseorang harus telah menguasai materi sebelumnya atau yang biasa disebut materi prasyaratnya.

## 5. Menggunakan bahasa simbol

Dalam matematika, penyampaian materi menggunakan simbol-simbol yang telah disepakati dan dipahami secara umum.

## 6. Diaplikasikan dalam bidang ilmu lain

Konsep matematika banyak diaplikasikan dalam bidang ilmu lain. Misalnya, materi fungsi digunakan dalam ilmu ekonomi untuk mempelajari fungsi permintaan dan fungsi penawaran.

Dari uraian di atas, jelas bahwa matematika adalah ilmu yang sangat diperlukan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam menghadapi perkembangan

ilmu pengetahuan dan teknologi. Oleh karena itu, hingga saat ini belum ada definisi tunggal tentang matematika. Hal ini sesuai dengan adanya beberapa definisi matematika yang belum mendapatkan kesepakatan.

## **B. Pemahaman Konsep Matematika**

Proses pembelajaran matematika tidak hanya berkaitan dengan keterampilan dalam menghitung dan menghafalkan rumus matematika sebanyak-banyaknya, namun juga harus memahami konsepnya. Pemahaman akan membuat siswa mampu menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan materi tersebut. Pencapaian pemahaman suatu konsep matematika bukan suatu hal yang mudah, dikarenakan kemampuan dalam memahami suatu konsep matematika setiap individu berbeda-beda.

Secara bahasa pemahaman konsep terdiri dari dua kata, yaitu pemahaman dan konsep. Menurut Sudijono (2011), pemahaman (*comprehension*) adalah kemampuan seseorang untuk mengerti atau memahami sesuatu setelah sesuatu itu diketahui dan diingat. Dan memahami adalah mengetahui tentang sesuatu dan dapat melihatnya dari berbagai segi. Jadi, pemahaman akan membuat seseorang mampu melihat sesuatu dari berbagai segi dan mengingatnya dengan baik.

Konsep merupakan salah satu objek kajian matematika yang mendasar dan sangat penting. Menurut Soedjadi (2000), konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk melakukan penggolongan atau klasifikasi. Pembentukan suatu konsep dapat melalui abstraksi, idealisasi, abstraksi dan idealisasi, serta penambahan syarat pada konsep terdahulu. Konsep-konsep dalam matematika

memiliki keterkaitan antara satu dengan yang lainnya, maka siswa harus lebih banyak diberikan kesempatan untuk melihat kaitan-kaitan dengan materi yang lain. Hal tersebut dimaksudkan agar siswa dapat memahami materi matematika secara mendalam.

Hudojo (1990) menyatakan bahwa dalam mempelajari konsep B yang mendasarkan kepada konsep A, seseorang perlu memahami lebih dulu konsep A. Tanpa memahami konsep A, tidak mungkin orang itu memahami konsep B. Misalnya, jika siswa ingin memahami konsep integral (anti turunan), maka terlebih dahulu siswa tersebut harus mampu memahami konsep turunan suatu fungsi. Demikian juga, jika siswa ingin memahami konsep turunan, maka terlebih dahulu harus memahami konsep limit. Ini berarti, mempelajari matematika haruslah bertahap dan berurutan serta mendasar kepada pengalaman belajar yang lalu. Dengan demikian, pemahaman konsep sangat penting, karena dengan pemahaman konsep akan memudahkan siswa dalam mempelajari matematika.

Depdiknas (Kemendiknas No.59 Tahun 2014) menjelaskan bahwa pembelajaran matematika bertujuan agar siswa mampu memahami konsep matematika, merupakan kompetensi dalam menjelaskan keterkaitan antar konsep dan menggunakan konsep maupun algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika di atas, maka setelah proses pembelajaran siswa diharapkan dapat memahami suatu konsep matematika sehingga dapat menggunakan kemampuan tersebut dalam menghadapi masalah-masalah matematika. Pemahaman konsep yang baik akan membuat siswa

dapat menjelaskan materi dengan bahasanya sendiri sehingga dapat lebih mudah untuk dipahaminya dan dapat diingat lebih lama.

Mengingat pentingnya pemahaman konsep tersebut, Hiebert dan Carpenter (Sholihah dan Mubarak, 2016) berpendapat bahwa pengajaran yang menekankan kepada pemahaman mempunyai sedikitnya lima keuntungan, yaitu:

1. Pemahaman memberikan generatif artinya bila seseorang telah memahami suatu konsep, maka pengetahuan itu akan mengakibatkan pemahaman yang lain karena adanya jalinan antar pengetahuan yang dimiliki siswa sehingga setiap pengetahuan baru melalui keterkaitan dengan pengetahuan yang sudah ada sebelumnya.
2. Pemahaman mengacu ingatan artinya suatu pengetahuan yang telah dipahami dengan baik akan diatur dan dihubungkan secara efektif dengan pengetahuan-pengetahuan yang lain melalui pengorganisasian skema atau pengetahuan secara lebih efisien di dalam struktur kognitif berfikir sehingga pengetahuan itu lebih mudah diingat.
3. Pemahaman mengurangi banyaknya hal yang harus diingat artinya jalinan yang terbentuk antara pengetahuan yang satu dengan yang lain dalam struktur kognitif siswa yang mempelajarinya dengan penuh pemahaman merupakan jalinan yang sangat baik.
4. Pemahaman meningkatkan transfer belajar artinya pemahaman suatu konsep matematika akan diperoleh siswa yang aktif menemukan keserupaan dari berbagai konsep tersebut. Hal ini akan membantu siswa untuk menganalisis apakah suatu konsep tertentu dapat diterapkan untuk suatu kondisi tertentu.

5. Pemahaman mempengaruhi keyakinan siswa artinya siswa yang memahami matematika dengan baik akan mempunyai keyakinan yang positif yang selanjutnya akan membantu perkembangan pengetahuan matematikanya.

Pemahaman konsep dapat membantu siswa dalam belajar matematika. Skemp (1976) mengemukakan bahwa pemahaman adalah “*to understand something to assimilate it into an appropriate schema*”. Terlihat adanya perbedaan antara pemahaman dan memahami. Pemahaman dikaitkan dengan asimilasi dan skema yang cocok. Skema diartikan sebagai konsep-konsep yang saling berhubungan. Menurut Skemp (1976), terdapat dua jenis pemahaman konsep, yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Pemahaman instrumental dapat diartikan sebagai pemahaman atas konsep yang saling terpisah dan hanya menghafalkan rumus dalam melakukan perhitungan sederhana, sedangkan pemahaman relasional adalah pemahaman yang melibatkan pengetahuan mengenai apa yang dilakukan dan mengapa melakukan hal tersebut.

Adapun indikator-indikator yang menunjukkan pemahaman konsep menurut Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/PP/2004 (Kesumawati, 2008), antara lain:

1. Kemampuan menyatakan ulang sebuah konsep

Kemampuan menyatakan ulang sebuah konsep adalah kemampuan siswa untuk mengungkapkan kembali apa yang telah dikomunikasikan dengan menggunakan bahasanya sendiri.

2. Kemampuan mengklasifikasikan objek menurut sifat-sifat tertentu sesuai dengan konsepnya

Kemampuan mengklasifikasikan objek menurut sifat-sifat tertentu sesuai dengan konsepnya adalah kemampuan siswa mengelompokkan suatu objek menurut jenisnya berdasarkan sifat-sifat yang terdapat dalam suatu materi.

3. Kemampuan memberi contoh dan bukan contoh

Kemampuan memberi contoh dan bukan contoh adalah kemampuan siswa untuk dapat membedakan contoh dan bukan contoh dari suatu materi. Pada indikator ini siswa mampu memahami contoh yang benar dan contoh yang tidak benar.

4. Kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis

Kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis adalah kemampuan siswa dalam memaparkan konsep ke dalam bentuk gambar atau simbol secara berurutan yang bersifat matematis.

5. Kemampuan mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup dari suatu konsep

Kemampuan mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup dari suatu konsep adalah kemampuan siswa mengkaji mana syarat perlu dan mana syarat cukup yang terkait dalam suatu konsep materi.

6. Kemampuan menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu

Kemampuan menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur tertentu adalah kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal dengan tepat sesuai dengan prosedur/langkah-langkah penyelesaiannya.

#### 7. Kemampuan mengaplikasikan konsep atau algoritma ke pemecahan masalah

Kemampuan mengaplikasikan konsep atau algoritma ke pemecahan masalah adalah kemampuan siswa menggunakan konsep serta prosedur dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari.

Selain itu, menurut Sanjaya (2009), adapun ciri-ciri yang dapat diamati dalam hasil belajar matematika siswa yang dapat dijadikan sebagai kriteria pemahaman konsep adalah sebagai berikut:

1. Siswa dikatakan dapat menyatakan atribut konsep apabila dapat mengidentifikasi ciri-ciri, simbol-simbol, dan memahami penggunaan dari konsep tersebut.
2. Siswa dikatakan dapat memberikan contoh dari konsep apabila dapat mengidentifikasi satu atau beberapa contoh berdasarkan ciri-ciri dari konsep. Di samping itu, siswa dapat mengidentifikasi tambahan contoh yang tidak diberi label dengan menggunakan ya atau bukan.
3. Siswa dikatakan dapat memberikan non-contoh dari konsep apabila dapat mengidentifikasi suatu contoh tetapi tidak berdasarkan ciri-ciri dan konsep yang dimaksud.
4. Siswa dikatakan dapat menyatakan nama dan mendefinisikan suatu konsep apabila siswa dapat menyatakan kembali definisi konsep sesuai dengan ciri-ciri yang esensial.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka pemahaman konsep matematika perlu ditanamkan kepada siswa agar siswa mampu menyelesaikan soal-soal dan mampu mengaplikasikan pembelajaran tersebut dalam dunia nyata. Selain itu, juga

ditanamkan kepada siswa tuntutan memahami tentang definisi, pengertian, cara pemecahan masalah maupun pengoperasian matematika secara benar agar menjadi bekal dalam mempelajari matematika pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

### C. Materi Turunan

#### 1. Definisi Turunan (Purcell, 2004)

##### Definisi

Turunan sebuah fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca “ $f$  aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan  $x$  adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan  $\infty$  atau  $-\infty$ .

Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa  $f$  terdiferensiasikan di  $c$ .

Pencarian turunan disebut diferensiasi.

##### Contoh 1

Andaikan  $f(x) = 13x - 6$ . Carilah  $f'(4)$

##### Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 13 = 13 \end{aligned}$$

**Contoh 2**

Jika  $f(x) = x^3 + 7x$ , carilah  $f'(x)$ .

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\
 &= 3x^2 + 7
 \end{aligned}$$

**2. Aturan Pencarian Turunan (Purcell, 2004)****Teorema A** Aturan Fungsi Konstanta

Jika  $f(x) = k$  dengan  $k$  suatu konstanta, maka untuk sebarang  $x$ ,  $f'(x) = 0$

**Bukti**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

**Teorema B** Aturan Fungsi Identitas

Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$

**Bukti**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

**Teorema C** Aturan Pangkat

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif, maka  $f'(x) = nx^{n-1}$

**Bukti**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]}{h} \end{aligned}$$

Di dalam kurung, semua suku kecuali yang pertama mempunyai  $h$  sebagai faktor, sehingga masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila  $h$  mendekati nol. Jadi,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

**Contoh**

- $f(x) = x^3$ , maka  $f'(x) = 3x^2$
- $f(x) = x^9$ , maka  $f'(x) = 9x^8$
- $f(x) = x^{100}$ , maka  $f'(x) = 100x^{99}$

**Teorema D** Aturan Kelipatan Konstanta

Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$$

**Bukti**

Andaikan  $F(x) = k \cdot f(x)$ . Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

### Contoh

a.  $f(x) = -7x^3$

Misalkan  $f(x) = -7 \cdot g(x)$  dengan  $g(x) = x^3$ , diperoleh  $g'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = -7g'(x) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

b.  $f(x) = \frac{4}{3}x^9$

Misalkan  $f(x) = \frac{4}{3} \cdot g(x)$  dengan  $g(x) = x^9$ , diperoleh  $g'(x) = 9x^8$

$$f'(x) = \frac{4}{3}g'(x) = \frac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

### Teorema E Aturan Jumlah

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

### Bukti

Andaikan  $F(x) = f(x) + g(x)$ . Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

**Teorema F** Aturan Selisih

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

**Bukti**

Andaikan  $F(x) = f(x) - g(x)$ . Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

**Contoh**

Tentukan turunan dari  $f(x) = 5x^2 + 7x - 6$

**Penyelesaian**

Misalkan  $f(x) = g(x) - h(x)$  dengan  $g(x) = 5x^2 + 7x$ , dan  $h(x) = 6$ .

Selanjutnya misalkan juga bahwa  $g(x) = u(x) + v(x)$  dengan  $u(x) = 5x^2$ ,

$v(x) = 7x$ , maka berdasarkan aturan pangkat dan Teorema D diperoleh  $u'(x) =$

$5 \cdot 2x^{2-1} = 10x$  dan  $v'(x) = 7$ . Kemudian dengan menggunakan Terema A,

diperoleh  $h'(x) = 0$ . Selanjutnya, dengan aturan penjumlahan diperoleh  $g'(x) =$

$u'(x) + v'(x) = 10x + 7$ . Dengan menggunakan aturan selisih, diperoleh  $f'(x) =$

$g'(x) - h'(x) = 10x + 7 - 0 = f'(x) = 10x + 7$ .

Jadi,  $f'(x) = 10x + 7$

**Teorema G** Aturan Hasil Kali

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

**Bukti**

Andaikan  $F(x) = f(x)g(x)$ . Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

**Contoh**

Carilah turunan  $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$

**Penyelesaian**

Misalkan  $f(x) = g(x)h(x)$  dengan  $g(x) = 3x^2 - 5$  dan  $h(x) = 2x^4 - x$ , maka

$$g'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 6x \quad (\text{Teorema A, C, D, F})$$

$$h'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} - 1 = 8x^3 - 1 \quad (\text{Teorema B, C, D, F})$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema G, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= 6x(2x^4 - x) + (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 12x^5 - 6x^2 + 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 \\
 &= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5
 \end{aligned}$$

**Teorema H** Aturan Hasilbagi

Andaikan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan  $g(x) \neq 0$ . Maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Bukti**

Andaikan  $F(x) = f(x)/g(x)$ . Maka

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left[ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right\} \\
 &= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] \frac{1}{g(x)g(x)}
 \end{aligned}$$

**Contoh**

Carilah turunan  $\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$

**Penyelesaian**

Misalkan  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  dengan  $u(x) = 3x - 5$  dan  $v(x) = x^2 + 7$ , maka

$$u'(x) = 3 - 0 = 3 \quad (\text{Teorema A, B, D, F})$$

$$v'(x) = 2x^{2-1} + 0 = 2x \quad (\text{Teorema A, C, E})$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema G, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{3(x^2 + 7) - (3x - 5)(2x)}{(x^2 + 7)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 21 - 6x^2 + 10x}{(x^2 + 7)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2} \end{aligned}$$

### **Teorema I** Aturan Rantai

Andaikan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ . Jika  $g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $f$  terdiferensialkan di  $u = g(x)$ , maka fungsi komposit  $f \circ g$ , didefinisikan oleh  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  terdiferensialkan di  $x$  dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

### **Contoh**

Jika  $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ , tentukanlah  $f'(3)$

### **Penyelesaian**

Misalkan  $f(x) = (g \circ h)(x)$  dengan  $g(x) = x^{60}$  dan  $h(x) = 2x^2 - 4x + 1$ , maka

$$g'(x) = 60x^{60-1} = 60x^{59} \quad (\text{Teorema C})$$

$$h'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} - 4 + 0 = 4x - 4 \quad (\text{Teorema A, B, C, D, E, F})$$

Sehingga dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\
 &= 60(h(x))^{59}(4x - 4) \\
 &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \\
 &= 240(2x^2 - 4x + 1)^{59}(x - 1), \text{ maka diperoleh} \\
 f'(3) &= 240(2(3)^2 - 4(3) + 1)^{59}(3 - 1) \\
 &= 240(18 - 12 + 1)^{59}(2) \\
 &= 480(7)^{59}
 \end{aligned}$$

### 3. Aplikasi Turunan

#### Gradien Garis Singgung Kurva (Stewart, 2008)

Garis singgung terhadap kurva  $y = f(x)$  di titik  $(c, f(c))$  adalah garis yang melalui  $P$  dengan kemiringan

$$m = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Perhatikan bahwa  $m = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$ .

Sehingga gradien/kemiringan garis singgung  $f(x)$  di  $(c, f(c))$  adalah  $f'(c)$ .

#### Contoh

a. Tentukan kemiringan dari garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$ .

#### Penyelesaian

Kemiringan dari garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$  adalah  $f'(1)$ . Perhatikan bahwa  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , maka  $f'(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$ .

Jadi, kemiringan dari garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$  adalah 2.

Berikut ini adalah beberapa contoh yang melibatkan konsep turunan dengan persamaan garis lurus serta kedudukan antar dua buah garis lurus.

- b. Tentukan persamaan garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$ .

**Penyelesaian**

Perhatikan bahwa garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$  memiliki gradien  $f'(1) = 2$  serta melalui  $(1, f(1))$ , maka persamaannya adalah

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2$$

Jadi, persamaan garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$  adalah  $y = 2x - 2$

- c. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis singgung

$$f(x) = x^3 - x \text{ di } x = 1.$$

**Penyelesaian**

Misalkan bahwa garis yang tegak lurus dengan garis singgung  $f(x)$  di  $x = 1$  adalah  $m$ . Karena  $m$  dan garis singgung  $f(x)$  di  $x = 1$  tegak lurus, maka gradien- $m \times f'(1) = -1$ .

Akibatnya, gradien- $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$ . Diperoleh bahwa  $m$  melalui  $(1, f(1))$  dan memiliki gradien  $-\frac{1}{2}$ , akibatnya

$$\begin{aligned} m: y - f(1) &= -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow m: y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow 2y = -x + 2 \\ &\rightarrow m: x + 2y = 2 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang tegak lurus dengan garis singgung  $f(x) = x^3 - x$  di  $x = 1$  adalah  $x + 2y = 2$ .

## Maksimum dan Minimum Nilai Fungsi (Djohan & Budhi, 2007)

### Definisi

Misalkan  $f$  sebuah fungsi dengan daerah definisi  $Df$  dan  $c \in Df$ .

- $f$  disebut mencapai maksimum di  $c$  bila  $f(c) \geq f(x) \forall x \in Df$  dan  $f(c)$  disebut nilai maksimum serta  $(c, f(c))$  disebut titik maksimum
- $f$  disebut mencapai minimum di  $c$  bila  $f(c) \leq f(x) \forall x \in Df$  dan  $f(c)$  disebut nilai minimum serta  $(c, f(c))$  disebut titik minimum
- $f(c)$  disebut nilai ekstrim  $f$  pada  $Df$  jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum dan  $(c, f(c))$  disebut titik ekstrem

Sifat berikut menjamin eksistensi dari nilai maksimum dan nilai minimum pada suatu selang tutup terbatas.

### Teorema Eksistensi Maksimum-Minimum

Jika  $f$  kontinu pada selang tutup  $[a, b]$  maka  $f$  mencapai nilai maksimum dan minimum di sana

Tempat-tempat kemungkinan terjadinya ekstrim (titik uji/kritis) adalah sebagai berikut.

- Titik ujung interval
- Titik stationer (titik dengan sifat  $f'(x) = 0$ ).
- Titik singular (titik di mana  $f$  tidak mempunyai turunan)

*Catatan:  $f$  adalah fungsi pada interval tertutup terbatas yang memuat  $c$ .*

Sehingga dari sini, langkah-langkah dalam menentukan nilai ekstrim adalah sebagai berikut.

**Langkah 1** Menentukan titik-titik kritis  $f$  pada  $I$ .

**Langkah 2** Menghitung  $f$  pada setiap titik-titik kritis. Yang terbesar di antara nilai-nilai ini adalah nilai maksimum, yang terkecil adalah nilai minimum.

Contoh-contoh berikut akan mengilustrasikan langkah-langkah tersebut.

### Contoh

- a. Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  pada  $[-\frac{1}{2}, 2]$

### Penyelesaian

Titik-titik ujungnya adalah  $-\frac{1}{2}$  dan 2. Untuk mencari stationer, diselesaikan  $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$  untuk  $x$ , diperoleh  $x = 0, 1$ . Tidak ada titik singular. Jadi, titik-titik kritisnya adalah ketika  $x = -\frac{1}{2}, 0, 1, 2$ .

Langkah selanjutnya adalah menentukan  $f$  pada setiap titik-titik kritisnya.

$$\text{Untuk } x = -\frac{1}{2}, \text{ maka } f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\text{Untuk } x = 0, \text{ maka } f(x) = f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = 0 + 0 = 0$$

$$\text{Untuk } x = 1, \text{ maka } f(x) = f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = -2 + 3 = 1$$

$$\text{Untuk } x = 2, \text{ maka } f(x) = f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 = -16 + 12 = -4$$

Jadi, nilai maksimum adalah 1 ketika  $x = -\frac{1}{2}$  dan  $x = 1$  serta nilai minimumnya adalah  $-4$  ketika  $x = 2$ .

b. Carilah titik maksimum dan titik minimum dari  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  pada  $[-1,2]$ !

### Penyelesaian

Titik-titik ujungnya adalah  $-1$  dan  $2$ . Selanjutnya, perhatikan bahwa  $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  tidak pernah nol sehingga  $f$  tidak memiliki titik stationer pada  $[-1,2]$ .

Selain itu,  $f'(0)$  tidak ada sehingga diperoleh juga bahwa  $(0, f(0))$  merupakan titik singular. Akibatnya, titik-titik kritisnya adalah  $x = -1, 2, 0$ .

Langkah selanjutnya adalah menentukan  $f$  pada setiap titik-titik kritisnya.

Untuk  $x = 0$ , maka  $f(x) = f(0) = (0)^{\frac{2}{3}} = 0$

Untuk  $x = -1$ , maka  $f(x) = f(-1) = (-1)^{\frac{2}{3}} = 1$

Untuk  $x = 2$ , maka  $f(x) = f(2) = (2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

Jadi, nilai maksimum adalah  $\sqrt[3]{4}$  ketika  $x = 2$  dan nilai minimumnya adalah  $0$  ketika  $x = 0$

### D. Konsep Teori APOS

Teori APOS diawali dengan hipotesis yang dinyatakan oleh Dubinsky & McDonald (2001), yaitu:

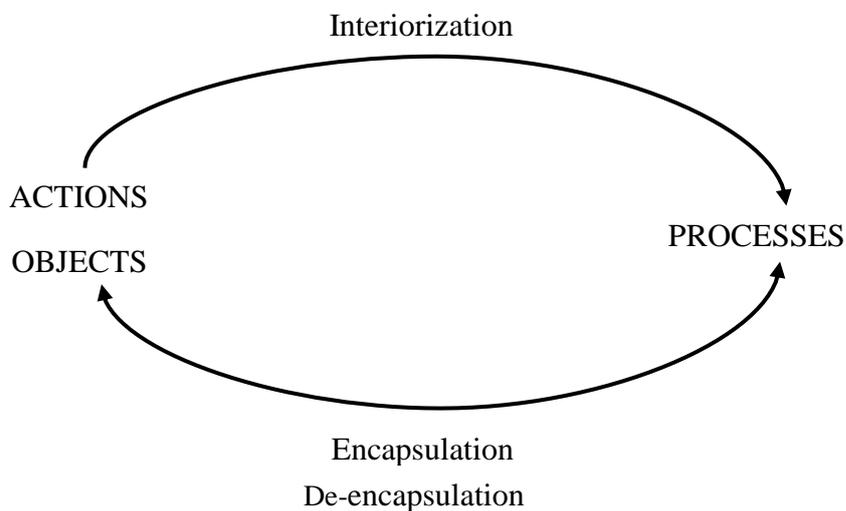
*An individual mathematical knowledge is her or his tendency to respond to perceived mathematical problem situations by constructing mental actions, processes, and objects and organizing them in schemas to make sense of the situations and solve the problems. In reference to these mental constructions we call it APOS Theory.*

Menurut Dubinsky dan McDonald (2001), teori APOS adalah suatu teori belajar yang menguraikan tentang bagaimana kegiatan mental seorang anak yang berbentuk aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*)

ketika mengkonstruksi konsep matematika. Teori APOS dapat digunakan untuk membandingkan kemampuan individu dalam mengkonstruksi mental yang telah terbentuk untuk suatu konsep matematika. Misalkan, dua individu yang kelihatannya menguasai konsep tertentu secara sama dapat dideteksi lebih lanjut, jika seorang dapat menjelaskan lebih lanjut suatu konsep maka ia berada pada tingkat yang lebih baik daripada yang satunya. Selanjutnya teori APOS dapat membuat prediksi yang mantap jika kumpulan *action*, *process*, *object* dan *schema* tertentu telah dikonstruksi oleh seorang individu dengan baik, maka individu tersebut akan berhasil menggunakan konsep matematika tersebut dalam menyelesaikan suatu persoalan (Dubinsky & McDonald, 2001).

Teori APOS hadir sebagai upaya untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh Piaget untuk menggambarkan perkembangan berpikir logis anak dan memperluas ide untuk konsep-konsep matematika lanjut. (Dubinsky & McDonald, 2001). Menurut Suryadi (2005), seorang anak dapat mengkonstruksi konsep matematika dengan baik apabila anak tersebut mengalami aksi, proses, objek, dan skema. Seorang anak dikatakan telah memiliki suatu aksi, jika anak tersebut memusatkan pikirannya dalam upaya memahami konsep matematika yang dihadapinya. Seorang anak dikatakan telah memiliki suatu proses, jika berpikirnya terbatas pada konsep matematika yang dihadapinya dan ditandai dengan munculnya kemampuan untuk membahas konsep matematika tersebut. Seorang anak dikatakan telah memiliki objek, jika anak tersebut telah mampu menjelaskan sifat-sifat dari konsep matematika. Seorang anak dikatakan telah

memiliki skema, jika anak tersebut telah mampu mengkonstruksi contoh-contoh konsep matematika sesuai dengan persyaratan yang telah ditentukan.



**Gambar 2.1 Skema APOS**

Asiala, *et al* (1997) menyatakan bahwa tujuan yang ingin dicapai dari teori APOS adalah terbentuknya konstruksi mental seorang individu. Yang dimaksud konstruksi mental dalam konteks ini adalah terbentuknya aksi (*action*), yang direnungkan (*interiorized*) menjadi proses (*process*), selanjutnya dirangkum (*encapsulated*) menjadi objek (*object*), kemudian objek tersebut dapat diurai kembali (*de-encapsulated*) menjadi proses. Aksi, proses, dan objek dapat diorganisasi menjadi suatu skema (*schema*), yang selanjutnya disingkat menjadi APOS. Adapun tahapan konstruksi mental tersebut adalah sebagai berikut:

1. Aksi (*action*)

Menurut Dubinsky & McDonald (2001), aksi adalah suatu transformasi dari objek-objek yang dirasakan oleh individu sebagai dasar eksternal dan sebagai kebutuhan, baik secara eksplisit maupun dari memori, instruksi langkah demi langkah tentang cara melakukan operasi. Aksi membutuhkan pengajaran khusus

dan kebutuhan untuk melakukan setiap langkah transformasi secara eksplisit sebab aksi merupakan aktivitas prosedural. Oleh karena itu, kinerja yang dilakukan pada aksi merupakan kinerja yang prosedural. Contohnya, seorang siswa membutuhkan sebuah persamaan eksplisit untuk memikirkan tentang turunan dari fungsi tersebut, katakanlah  $f'(x)$ , kita misalkan  $f(x) = x^3$  dan seorang siswa bisa melakukan sedikit lebih banyak daripada memperlihatkan aksi  $f'(x) = 3x^2$  dianggap memiliki pemahaman aksi tentang turunan fungsi.

## 2. Proses (*process*)

Proses adalah struktur mental dengan melakukan operasi yang sama seperti aksi tetapi sepenuhnya dipikirkan individu (Maharaj, 2010). Ketika aksi diulang dan individu merefleksikan aksi, dimana dapat mengkonstruksi mental secara internal disebut suatu proses, dimana individu dapat melakukan aksi yang sama tetapi tidak lama membutuhkan stimulus eksternal (Dubinsky & McDonald, 2001). Jadi, proses adalah aksi yang dilakukan secara berulang sehingga individu dapat melakukannya di dalam imajinasinya. Kinerja dalam proses bukan lagi termasuk dalam kinerja prosedural karena kinerja yang dilakukan berada dalam imajinasi. Contohnya, seorang individu dengan pemahaman proses tentang turunan dari sebuah fungsi, katakanlah  $g(x) = (x + 1)^2$ , akan membentuk proses mental mencakup bahwa  $g(x)$  sebaiknya terlebih dahulu dituliskan dalam bentuk sederhana dengan mengkuadratkan binomial  $(x^2 + 2x + 1)$  dan kemudian turunannya bisa ditentukan dengan menerapkan aturan “turunan dari penjumlahan beberapa fungsi adalah penjumlahan dari masing-masing turunan fungsi-fungsi tersebut”.

### 3. Objek (*object*)

Objek dibangun dari proses ketika individu menyadari proses sebagai totalitas dan menyadari transformasi dapat bertindak di atasnya (Dubinsky & McDonald, 2001). Objek merupakan kegiatan yang dilakukan setelah individu melakukan aksi dan proses sehingga individu tersebut dapat menemukan hal lain yang diperoleh dari aksi dan proses tersebut. Contohnya, fungsi  $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$  adalah komposisi dari fungsi  $f(x) = x^{100}$  dan  $g(x) = x^2 + 1$  dengan  $h(x) = f(g(x))$ . Untuk menentukan turunan fungsi tersebut,  $h(x)$  sebaiknya terlebih dahulu dikonseptualkan sebagai sebuah objek yang meliputi komposisi dari dua buah fungsi. Untuk fungsi ini, pemahaman proses untuk menentukan turunan sebaiknya dienkapsulasi ke dalam konteks aturan rantai untuk menentukan turunan dari  $h(x)$ .

### 4. Skema (*schema*)

Suatu skema untuk konsep matematika adalah kumpulan dari aksi, proses, objek, dan skema lain yang dihubungkan oleh beberapa prinsip secara umum (Dubinsky & McDonald, 2001). Menurut Maharaj (2010), suatu topik matematika yang melibatkan aksi, proses, dan objek yang terorganisir dan dihubungkan ke dalam kerangka kerja yang koheren disebut skema. Skema merupakan kegiatan yang dilakukan ketika individu dapat menggabungkan antara aksi, proses, objek, dan skema lain yang saling berhubungan. Contohnya, koherensi mungkin terletak pada pemahaman untuk menentukan ekstrimum lokal dari sebuah fungsi, misalkan  $h(x) = (x^2 - 1)^{100}$ , hal-hal berikut harus dipertimbangkan: turunan  $h'(x)$ , titik kritis  $h$  terjadi ketika  $h'(x) = 0$ , titik-titik kritis ini harus digunakan untuk

membentuk diagram tanda  $h'(x)$ , dan ini harus dianalisis untuk menentukan sifat ekstrimum dari  $h$ .

### **E. Penelitian yang Relevan**

Hasil penelitian yang dilakukan oleh Kaplan, Ozturk & Ocal (2015) yang berjudul “*Relieving of Misconceptions of Derivative Concept with Derive*”, mereka menemukan bahwa sebagian besar siswa belum mampu menggunakan operasi/aturan-aturan dalam menentukan turunan dengan menggunakan definisi turunan, yang bermakna bahwa pemahaman siswa mengenai definisi turunan pada penelitian tersebut masih kurang. Selain itu, juga diperoleh bahwa siswa tidak bisa membentuk hubungan antara gradien garis singgung dan garis normal (garis yang tegak lurus dengan garis singgung yang dimaksud).

Lain halnya dalam penelitian oleh Ningsih (2016) yang bertujuan untuk mengetahui kemampuan pemahaman konsep matematika mahasiswa melalui penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) berdasarkan teori APOS pada materi turunan. Penelitian tersebut menggunakan metode penelitian deskriptif kualitatif. Berdasarkan hasil analisis data diketahui bahwa rata-rata kemampuan pemahaman konsep matematika mahasiswa melalui penerapan LAM berbasis teori APOS pada materi turunan termasuk dalam kategori cukup.

Berbeda dengan hal di atas, hasil penelitian Maharaj (2010) yang berjudul “*An APOS Analysis of Students’ Understanding of the Concept of a Limit of a Function*”, penelitian tersebut menegaskan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam memahami konsep limit dan menunjukkan hasil dari banyak mahasiswa yang

tidak memiliki struktur mental yang sesuai dengan proses, objek, dan skema. Berdasarkan analisis tersebut, teori APOS dapat digunakan untuk menginvestigasi perkembangan pemahaman matematika mahasiswa secara umum, khususnya konsep limit fungsi.

Selain itu, dalam penelitian lain oleh Maharaj (2013) yang berjudul “*An APOS Analysis of Natural Science Students’ Understanding of Derivatives*” juga menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengaplikasikan turunan sehingga teori APOS dapat digunakan untuk menginvestigasi perkembangan matematika secara umum, terkhusus dalam aplikasi turunan. Partisipan dalam penelitian tersebut adalah mahasiswa di University of KwaZulu-Natal (UKZN) Afrika Selatan. Dari penelitian tersebut, juga diperoleh bahwa perlu adanya penekanan yang lebih besar selama pembelajaran materi turunan pada bagian kaitan antara turunan dengan daerah (interval) ketika fungsi naik maupun fungsi turun termasuk nilai maksimum dan minimum. Selain itu, diperoleh bahwa aturan rantai adalah materi yang sulit untuk disampaikan kepada mahasiswa yang berakibat pada tingkat pemahaman mahasiswa yang kurang.

Sedangkan dalam penelitian yang berjudul “*Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar*”, peneliti ingin mengetahui sejauh mana pemahaman konsep siswa pada materi turunan berdasarkan teori APOS. Adapun yang menjadi partisipan pada penelitian ini adalah siswa yang telah mempelajari materi turunan yang dikategorikan dalam kelompok subjek berkemampuan tinggi, sedang, dan rendah.

## **F. Kerangka Pikir**

Matematika merupakan cabang ilmu pengetahuan yang bersifat pasti dan universal yang dihasilkan dari proses belajar. Matematika memiliki pengertian yang beragam. Setiap tokoh memberikan definisi tentang matematika sesuai dengan sudut pandang mereka. Dalam mempelajari matematika, setiap individu memiliki kemampuan matematika yang berbeda.

Kemampuan matematika yang dimiliki setiap individu berkaitan dengan bagaimana siswa mampu menyerap, memahami, mengingat, menerapkan, memecahkan, membuktikan, serta mampu menjelaskan kembali suatu konsep dalam berbagai masalah dalam kehidupan nyata. Kemampuan matematika itu sendiri terbagi menjadi beberapa jenis antara lain kemampuan tinggi, kemampuan sedang, dan kemampuan rendah (Lestari dan Yudhanegara, 2015). Kemampuan matematika yang dimiliki siswa dapat mempengaruhi bagaimana siswa memahami konsep yang telah dipelajari.

Proses pembelajaran matematika tidak hanya berkaitan dengan keterampilan dalam menghitung dan menghafalkan rumus matematika sebanyak-banyaknya, namun juga harus memahami konsepnya. Pencapaian pemahaman suatu konsep matematika bukan suatu hal yang mudah, dikarenakan kemampuan dalam memahami suatu konsep matematika setiap individu berbeda-beda. Pemahaman konsep yang baik akan membuat siswa dapat menjelaskan materi dengan bahasanya sendiri sehingga dapat lebih mudah dipahami dan dapat diingat lebih lama.

Selain itu, pemahaman konsep matematika merupakan hasil konstruksi atau rekonstruksi terhadap objek-objek matematika, dimana konstruksi atau rekonstruksi tersebut dilakukan melalui aktivitas berupa aksi matematika, proses, objek yang diorganisasikan dalam suatu skema untuk memecahkan suatu permasalahan (Asiala, *et al*, 1997). Hal ini sesuai dengan teori APOS yang menjelaskan konstruksi mental seorang individu sehingga setiap individu mampu menyelesaikan permasalahan matematika.

Setiap konstruksi mental yang dibentuk siswa mewakili level tentang konsep yang dipelajari. Dubinsky & McDonald (2001) menyatakan bahwa teori APOS adalah suatu teori belajar yang menguraikan tentang bagaimana kegiatan mental seorang anak yang berbentuk aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*) ketika mengkonstruksi konsep matematika.

Menurut Dubinsky & McDonald (2001), aksi adalah suatu transformasi dari objek-objek yang dirasakan oleh individu sebagai dasar eksternal dan sebagai kebutuhan, baik secara eksplisit maupun dari memori, instruksi langkah demi langkah tentang cara melakukan operasi. Seseorang yang mengalami suatu aksi, apabila orang tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan (Maharaj, 2013). Kegiatan siswa pada tahap ini merupakan aktivitas prosedural. Jika siswa menggunakan metode mereka, maka siswa tersebut sedang mengikuti instruksi eksternal.

Aksi yang diulang-ulang kemudian siswa melakukan refleksi terhadapnya, maka aksi tersebut menjadi proses, dimana individu dapat melakukan aksi yang sama tetapi tidak lama membutuhkan stimulus eksternal (Dubinsky & McDonald,

2001). Maharaj (2013) menyatakan bahwa proses terjadi secara internal di bawah kontrol individu yang melakukannya. Seseorang dikatakan mengalami suatu proses tentang suatu konsep, apabila berpikirnya terbatas pada ide matematika yang dihadapinya serta ditandai dengan munculnya kemampuan untuk melakukan refleksi terhadap ide matematika tersebut.

Ketika individu melakukan refleksi terhadap operasi-operasi yang telah diterapkan pada proses tertentu, individu mungkin menjadi sadar akan keseluruhan proses yang dilakukan sebagai totalitas dan menyadari transformasi dapat bertindak di atasnya (Dubinsky & McDonald, 2001). Keseluruhan proses tersebut menjadi suatu kesatuan objek dalam diri individu tersebut. Seseorang dikatakan telah memiliki objek dari suatu konsep matematika apabila seseorang telah mampu memperlakukan ide atau konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan untuk melakukan aksi atas objek tersebut, serta memberikan alasan dan penjelasan tentang sifat-sifatnya (Maharaj, 2013).

Sekali dikonstruksi, proses-proses dan objek-objek dapat dikaitkan dengan berbagai cara. Proses dan objek dihubungkan dengan fakta bahwa proses bertindak pada objek. Kumpulan proses-proses dan objek-objek ini dapat diorganisasi secara terstruktur dalam pikiran siswa. Individu pada level ini telah membentuk skema tentang suatu konsep matematika. Suatu skema untuk konsep matematika adalah kumpulan dari aksi, proses, objek, dan skema lain yang dihubungkan oleh beberapa prinsip secara umum (Dubinsky & McDonald, 2001). Selain itu, Maharaj (2013) menyatakan bahwa suatu skema dari suatu materi matematika adalah suatu koleksi aksi, proses, objek, dan skema lainnya yang saling terhubung sehingga membentuk

suatu kerangka kerja saling terkait di dalam pikiran atau otak seseorang. Oleh karena itu, dalam penelitian ini, teori APOS digunakan untuk mendeskripsikan tingkat pemahaman siswa dalam memahami konsep matematika. Dengan kata lain, bagaimana deskripsi pemahaman konsep yang dimiliki siswa pada tahap aksi, proses, objek, dan skema.

Adapun indikator pemahaman konsep berdasarkan teori APOS pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Tahap Aksi

Indikator pemahaman konsep pada tahap aksi adalah sebagai berikut.

- a. Kemampuan menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar.

2. Tahap Proses

Indikator pemahaman konsep pada tahap aksi adalah sebagai berikut.

- a. Kemampuan menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku.
- b. Kemampuan memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur.

### 3. Tahap Objek

Indikator pemahaman konsep pada tahap aksi adalah sebagai berikut.

- a. Kemampuan mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat.
- b. Kemampuan memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi).

### 4. Tahap Skema

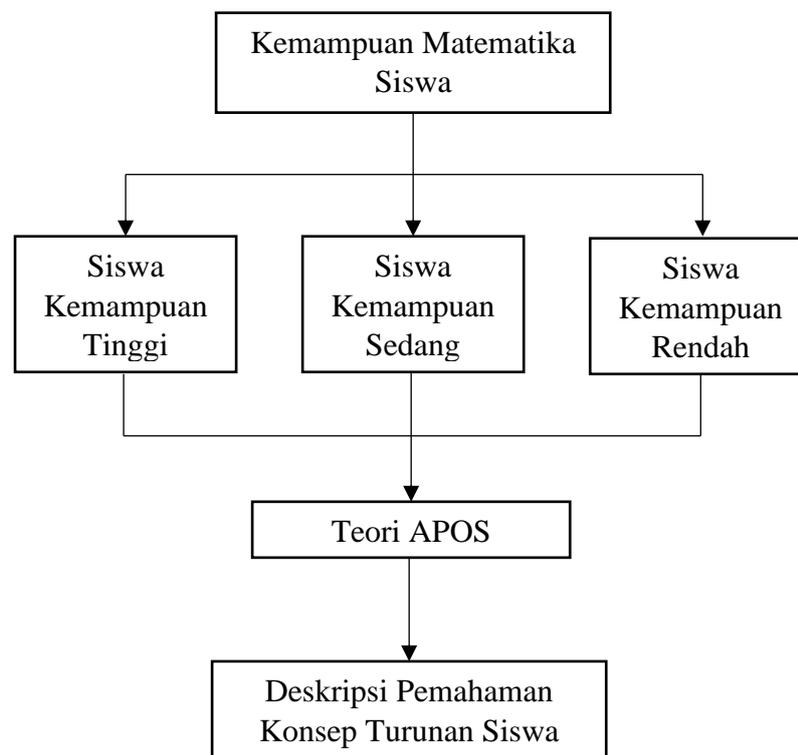
Indikator pemahaman konsep pada tahap aksi adalah sebagai berikut.

- a. Kemampuan mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur.
- b. Kemampuan mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta memilih dan menggunakan aturan/prosedur yang tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut.
- c. Kemampuan mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis.

Dengan indikator-indikator tersebut, akan diperoleh pemahaman siswa mengenai materi turunan berdasarkan teori APOS yang terdiri dari tahap aksi,

proses, objek, dan skema. Indikator-indikator tersebut digunakan untuk mengetahui pemahaman konsep turunan siswa dengan mengelompokkan siswa ke dalam kemampuan tinggi, sedang, dan rendah.

Secara sederhana kerangka pemikiran dalam penelitian ini dapat digambarkan sebagai berikut:



**Gambar 2.2 Kerangka Pikir Penelitian**

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **A. Jenis Penelitian**

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Penelitian ini bertujuan untuk mengungkapkan seluruh gejala atau keadaan yang terjadi saat penelitian dilaksanakan. Penelitian deskripsi kualitatif digunakan untuk menyajikan dan memberikan gambaran pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS.

#### **B. Waktu dan Tempat Penelitian**

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil Tahun Ajaran 2018/2019 yang berlangsung pada tanggal 14 Agustus 2018 – 10 September 2018 di kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar. Lokasi penelitian ini terletak di Jalan Baji Gau No. 17, Makassar dengan akreditasi sekolah A.

#### **C. Subjek Penelitian**

Subjek dalam penelitian ini adalah siswa kelas XII MIA-1 yang diperoleh dari data kemampuan matematika siswa. Data kemampuan matematika siswa digunakan untuk mengelompokkan siswa berdasarkan kemampuannya. Adapun subjek dalam penelitian ini terdiri dari 6 orang siswa, yaitu 2 siswa berkemampuan tinggi, 2 siswa berkemampuan sedang, dan 2 siswa berkemampuan rendah.

Adapun langkah-langkah pemilihan subjek dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh data kemampuan matematika siswa pada kelas XII MIA-1. Pengambilan subjek pada kelas tersebut dilakukan dengan tujuan tertentu, yaitu siswa yang mempunyai kemampuan pemahaman konsep yang berbeda, siswa yang mempunyai nilai yang berbeda, dan siswa yang direkomendasikan oleh guru. Data ini bertujuan untuk mengidentifikasi kemampuan siswa yang dikelompokkan dalam kemampuan tinggi, kemampuan sedang, dan kemampuan rendah.
2. Menganalisis skor kemampuan matematika setiap siswa dalam setiap kategori. Data tersebut diperoleh dari tes kemampuan matematika pada pokok bahasan yang diujikan. Lestari dan Yudhanegara (2015) membuat kriteria tingkat kemampuan matematika siswa menjadi tiga kategori yaitu kemampuan tinggi, kemampuan sedang, dan kemampuan rendah.
3. Menganalisis karakteristik siswa yang dijadikan subjek penelitian pada setiap kategori. Selain itu, ada pula kriteria yang harus terpenuhi oleh subjek penelitian yang dipilih. Adapun kriteria yang harus dipenuhi oleh subjek untuk dijadikan sebagai subjek penelitian antara lain: (1) subjek dapat berkomunikasi dengan baik selama proses wawancara dengan peneliti; (2) kesediaan subjek untuk selalu berpartisipasi dalam pengambilan data selama penelitian.
4. Subjek penelitian yang terpilih berjumlah 6 orang siswa yaitu 2 siswa yang memiliki kemampuan tinggi, 2 siswa yang memiliki kemampuan sedang, dan 2 siswa yang memiliki kemampuan rendah.

5. Dari masing-masing subjek yang dipilih akan diidentifikasi tingkat kemampuan pemahaman konsep yang dimilikinya berdasarkan teori APOS.

#### **D. Instrumen Penelitian**

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah peneliti itu sendiri sebagai instrumen utama, tes tertulis untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep siswa dan pedoman wawancara sebagai alat bantu dalam pengambilan data di lapangan.

##### **1. Peneliti**

Peneliti mutlak diperlukan dalam penelitian ini dikarenakan peran peneliti sebagai suatu pengamat partisipan dimana peneliti ingin mengetahui secara lebih jelas dan mendetail tentang semua kejadian yang dialami oleh siswa sebagai subjek penelitian. Peneliti melakukan wawancara dan mengumpulkan data serta menganalisis data. Guru matematika dan teman sejawat membantu peneliti pada saat melakukan pengamatan dan mengumpulkan data.

##### **2. Tes Kemampuan Matematika**

Tes kemampuan matematika yang dimaksud dalam penelitian ini adalah tes kemampuan matematika siswa pada materi turunan yang telah diajarkan pada kelas XI dengan mengacu pada indikator materi turunan. Tes kemampuan matematika diberikan untuk mengukur tingkat kemampuan siswa pada materi turunan yang akan dijadikan acuan dalam mengidentifikasi pemahaman konsep turunan siswa. Hasil tes ini akan digunakan untuk mengelompokkan siswa dalam kelompok kemampuan tinggi, sedang, dan rendah.

### 3. Tes Kemampuan Pemahaman Konsep

Tes kemampuan pemahaman konsep yang dimaksud dalam penelitian ini dirancang untuk mengetahui tingkat kemampuan siswa dalam memahami konsep turunan berdasarkan teori APOS. Tes kemampuan pemahaman konsep turunan akan dikembangkan sendiri oleh peneliti. Sebelum digunakan, tes tersebut dilakukan uji validitas dan uji reliabilitas instrumen. Tes kemampuan pemahaman konsep ini nantinya digunakan untuk mendeskripsikan tingkat kemampuan pemahaman konsep siswa berdasarkan teori APOS pada materi turunan.

### 4. Pedoman Wawancara

Pedoman wawancara digunakan untuk menggali lebih dalam mengenai kemampuan pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS. Wawancara dilakukan setelah subjek penelitian diberikan tes kemampuan pemahaman konsep.

Dalam penelitian ini digunakan satu jenis wawancara yaitu wawancara semi terstruktur. Tujuan dari wawancara semi terstruktur ini untuk menemukan permasalahan secara lebih terbuka, dimana pihak yang diajak wawancara diminta pendapat dan ide-idenya. Dalam melakukan wawancara, peneliti menggunakan bantuan pedoman wawancara untuk memudahkan dan memfokuskan pertanyaan yang akan diutarakan. Peneliti juga menggunakan alat bantu rekam untuk memudahkan dalam proses pengolahan data. Dalam penelitian ini peneliti melakukan wawancara dengan 6 siswa yang mewakili dari setiap kemampuan siswa, yaitu 2 siswa yang memiliki kemampuan tinggi, 2 siswa yang memiliki kemampuan sedang, dan 2 siswa yang memiliki kemampuan rendah.

## **E. Tahap-tahap Penelitian**

Menurut Moleong (2014), adapun tahapan-tahapan dalam melakukan penelitian antara lain:

### **1. Tahap Pra Lapangan**

Dalam tahap pra lapangan ada beberapa tahap yang harus dilakukan oleh peneliti untuk memperoleh penelitian, antara lain:

#### **a. Menyusun Rancangan Penelitian**

Sebelum melaksanakan penelitian, peneliti harus menyusun terlebih dahulu suatu rencana penelitian. Permasalahan atau topik penelitian harus mempunyai arti penting bagi keperluan ilmu pengetahuan dan kehidupan sehari-hari. Selain itu, memikirkan pencarian sekolah yang akan dijadikan lokasi penelitian untuk mengetahui kemampuan pemahaman konsep turunan siswa. Begitu pula yang berkaitan dengan merancang tahapan-tahapan yang akan dilakukan pada saat penelitian di lapangan hingga penulisan laporan.

#### **b. Memilih Lokasi Penelitian**

Peneliti mencari tempat yang akan dijadikan sebagai lokasi penelitian, baik kesesuaian keberadaan fokus penelitian maupun kesesuaian peneliti dengan lingkungan yang diteliti. Adapun lokasi penelitian yang dipilih oleh peneliti dan dianggap tepat untuk penelitian ini ialah SMAN 2 Makassar. Peneliti memilih sekolah ini sebagai lokasi penelitian dikarenakan berdasarkan hasil observasi peneliti. Peneliti menganggap bahwa dalam kenyataannya siswa tidak memiliki kesiapan individu dalam memahami konsep secara mendalam karena mereka terbiasa menerima berbagai macam rumus dan menghafalkan rumus tersebut

sehingga dalam mengaitkan antara konsep yang satu dengan yang lainnya masih sangat sulit. Proses pembelajaran matematika di sekolah ini juga masih berorientasi pada peningkatan prestasi hasil belajar siswa saja dan guru jarang memperhatikan aspek kemampuan siswa dalam memahami konsep turunan. Selain itu, dukungan dari Kepala SMAN 2 Makassar juga merupakan salah satu alasan dari peneliti untuk memilih sekolah ini sebagai lokasi penelitian.

c. Mengurus Perizinan

Peneliti meminta izin kepada instansi yang terkait sehubungan dengan penelitian yang akan dilaksanakan.

d. Menyiapkan Perlengkapan Penelitian

Peneliti menyiapkan segala peralatan dan perlengkapan yang akan digunakan selama proses penelitian. Misalnya, alat tulis dan alat dokumentasi yang akan digunakan untuk merekam proses penelitian.

e. Simulasi

Peneliti melakukan simulasi dengan mengamati subjek secara langsung selama proses penelitian hingga proses penelitian selesai. Dalam hal ini, pengamatan yang dilakukan mencakup kegiatan siswa sebelum penelitian (proses belajar siswa), ketika siswa diberikan tes tertulis dan kegiatan siswa saat wawancara.

## 2. Tahap Pekerjaan Lapangan

Uraian tentang tahap ini dibagi atas tiga bagian, yaitu:

### a. Memahami Latar Penelitian dan Persiapan Diri

Tahap ini merupakan tahap pertama yang dilakukan oleh peneliti pada saat awal-awal memasuki lokasi penelitian. Kegiatan ini dilakukan sejak peneliti mengurus izin penelitian, dimana peneliti melakukan interaksi dan komunikasi berupa sosialisasi diri terhadap lingkungan sosial dan lingkungan SMAN 2 Makassar.

### b. Memasuki Lapangan

Dalam tahap ini peneliti telah memulai aktivitas penelitian yang mana keberadaan peneliti telah diterima dan dapat menerima lokasi serta lingkungan penelitian.

## 3. Tahap Analisis Data

Tahap analisis data kualitatif ini merupakan upaya yang dilakukan dengan jalan bekerja dengan data, mengorganisasikan data, memilah-milahnya menjadi satuan yang dapat dikelola, mensintesiskannya, mencari dan menemukan pola, menemukan apa yang penting dan apa yang dipelajari, dan memutuskan apa yang dapat diceritakan kepada orang lain.

## 4. Tahap Penyusunan Laporan

Tahap penyusunan hasil penelitian dalam bentuk laporan penelitian dilakukan setelah seluruh data telah terkumpul, aktivitas penelitian telah selesai dilaksanakan, dan analisis terhadap seluruh data juga telah selesai dilakukan.

## F. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini antara lain:

### 1. Data Kemampuan Matematika

Data kemampuan matematika siswa diperoleh melalui tes yang diberikan sebelum tes pemahaman konsep siswa. Data ini digunakan untuk mengetahui gambaran mengenai kemampuan matematis siswa khususnya pada materi turunan. Selain itu, data ini juga digunakan untuk mengelompokkan siswa berdasarkan kemampuannya (tinggi, sedang, rendah). Pengelompokan siswa berdasarkan kemampuan matematika ditentukan sebagai berikut (Ma'sum, 2013).

**Tabel 3.1 Pengelompokan Siswa Berdasarkan Kemampuan Matematika**

Nilai	Kategori
$80 \leq skor\ yang\ diperoleh \leq 100$	Siswa kelompok tinggi
$60 \leq skor\ yang\ diperoleh < 80$	Siswa kelompok sedang
$0 \leq skor\ yang\ diperoleh < 60$	Siswa kelompok rendah

*Sumber: Penelitian Ali Ma'sum, 2013*

### 2. Data Pemahaman Konsep Turunan Siswa

Data pemahaman konsep turunan siswa diperoleh melalui pemberian instrumen tes pemahaman konsep kepada subjek penelitian. Dalam hal ini instrumen tes yang diberikan digunakan untuk mengukur tingkat kemampuan pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS.

### 3. Wawancara

Untuk mendukung data pemahaman konsep matematika siswa yang telah diperoleh, maka akan dilakukan wawancara setelah tes pemahaman konsep diberikan dengan menggunakan pedoman wawancara. Tujuan dari wawancara

tersebut adalah untuk mengklarifikasi jawaban yang telah diberikan oleh subjek penelitian sehingga dapat memberikan informasi lebih lanjut tentang pemahaman konsep turunan siswa berdasarkan teori APOS.

Wawancara ini dilakukan tidak hanya untuk mengkaji lebih dalam tentang pemahaman konsep turunan siswa, tetapi juga untuk mendapatkan informasi yang belum dituliskan oleh siswa saat pemberian tes atau informasi baru yang mungkin tidak diperoleh saat tes. Wawancara dilakukan berdasarkan instrumen pedoman wawancara yang telah dibuat. Pertanyaan tidak harus sama persis dengan pedoman wawancara namun memuat inti dari poin tersebut sehingga lebih mendalami informasi yang ingin diperoleh.

### **G. Tahap Analisis Data**

Menurut Miles, Huberman, dan Saldana (2014) di dalam analisis data kualitatif terdapat tiga alur kegiatan yang terjadi secara bersamaan. Aktivitas dalam analisis data yaitu: *Data Condensation*, *Data Display*, dan *Conclusion Drawing/Verifications*.

Data yang terkumpul dalam bentuk hasil tes tertulis pemahaman konsep turunan dan transkrip wawancara dianalisis menggunakan teknik analisis yang langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

#### **a. Kondensasi Data (*Data Condensation*)**

Kondensasi data merujuk pada proses memilih, menyederhanakan, mengabstrakkan, dan atau mentransformasikan data yang mendekati keseluruhan

bagian dari catatan-catatan lapangan secara tertulis, transkrip wawancara, dokumen-dokumen, dan materi-materi empiris lainnya.

Tahap kondensasi data yang dimaksud dalam penelitian ini adalah suatu bentuk analisis yang mengacu pada proses menggolongkan, membuang yang tidak perlu, dan mengorganisasikan data mentah yang diperoleh dari lapangan. Semua data dipilih sesuai dengan kebutuhan untuk menjawab pertanyaan penelitian. Misalnya jika ada kata-kata yang tidak penting pada wawancara, yang tidak mendukung dalam penelitian ini, maka tidak akan dituliskan dalam transkrip data hasil wawancara.

b. Penyajian Data (*Data Display*)

Penyajian data adalah sebuah pengorganisasian, penyatuan dari informasi yang memungkinkan penyimpulan dan aksi. Penyajian data membantu dalam memahami apa yang terjadi dan untuk melakukan sesuatu, termasuk analisis yang lebih mendalam atau mengambil aksi berdasarkan pemahaman.

Penyajian data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah pengklasifikasian dan identifikasi mengenai kemampuan siswa dalam memahami konsep berdasarkan teori APOS.

c. Penarikan Kesimpulan (*Conclusion Drawing/Verifications*)

Kegiatan analisis ketiga yang penting adalah menarik kesimpulan dan verifikasi. Dari permulaan pengumpulan data, seorang penganalisis kualitatif mulai mencari arti benda-benda, mencatat keteraturan penjelasan, konfigurasi-konfigurasi yang mungkin, alur sebab-akibat, dan proposisi. Kesimpulan-kesimpulan *final* mungkin tidak muncul sampai pengumpulan data berakhir, bergantung pada

besarnya kumpulan-kumpulan catatan lapangan, pengkodeannya, penyimpanan, dan metode pencarian ulang yang digunakan, kecakapan peneliti, dan tuntutan-tuntutan pemberi dana.

Tahap penarikan kesimpulan merupakan tahap akhir dari penelitian ini. Tahap penarikan kesimpulan dalam penelitian ini dilakukan berdasarkan hasil analisis data yang telah dikumpulkan melalui pengamatan, rekaman wawancara, catatan lapangan, serta data hasil tes kemampuan matematika dan tes pemahaman konsep turunan yang telah direduksi.

#### **H. Pengecekan Keabsahan Data**

Keabsahan data merupakan konsep penting yang diperbaharui dari konsep kesahihan (*validitas*) dan keandalan (*reliabilitas*) menurut versi positivisme dan disesuaikan dengan tuntutan pengetahuan, kriteria dan paradigmanya sendiri.

Untuk menetapkan keabsahan data diperlukan teknik pemeriksaan didasarkan atas sejumlah kriteria tertentu. Ada empat kriteria yang digunakan, yaitu derajat kepercayaan (*credibility*), keteralihan (*transferability*), kebergantungan (*dependability*), dan kepastian (*confirmability*). Adapun teknik untuk memeriksa keabsahan data adalah sebagai berikut:

##### **1. Triangulasi**

Salah satu teknik untuk memeriksa keabsahan data ialah triangulasi. Triangulasi merupakan teknik yang lazim dipakai untuk uji validitas dalam penelitian kualitatif. Teknik ini merupakan kegiatan pemeriksaan keabsahan data yang memanfaatkan sesuatu yang lain di luar data itu untuk keperluan pengecekan

atau sebagai pembanding terhadap data itu. Dalam penelitian ini digunakan teknik triangulasi sumber. Triangulasi sumber dilakukan dengan cara membandingkan data dari subjek I dan subjek II pada masing-masing kelompok kemampuan matematika siswa, yaitu 2 subjek berkemampuan tinggi, 2 subjek berkemampuan sedang, dan 2 subjek berkemampuan rendah..

## 2. Kecukupan Referensi

Dalam proses penggalian data, seorang peneliti harus memiliki referensi yang memadai, dapat diperoleh dari buku, jurnal penelitian, ataupun referensi terpercaya lainnya.

## 3. Auditing

Penelusuran audit tidak dapat dilaksanakan apabila tidak dilengkapi dengan catatan-catatan pelaksanaan keseluruhan proses dan hasil studi. Kebergantungan disini adalah bagaimana hasil penelitian ini dapat dipertanggungjawabkan dan dipertahankan sehingga peneliti melibatkan berbagai pihak ke dalam penelitian ini. Seperti konsultasi hasil penelitian ke dosen pembimbing dalam proses penulisan dan penyelesaian skripsi ini.

## **BAB IV**

### **HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini dikemukakan dan dijelaskan data hasil penelitian sebagai jawaban dari rumusan masalah yang dikemukakan sebelumnya yaitu mengenai kemampuan pemahaman konsep turunan berdasarkan teori APOS pada siswa kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar. Data tersebut diperoleh melalui hasil jawaban tes kemampuan matematika, hasil jawaban tes pemahaman konsep turunan siswa sebanyak 4 nomor, dan wawancara. Pemberian tes kemampuan matematika digunakan untuk mengelompokkan siswa dalam kategori kemampuan tinggi, kemampuan sedang, dan kemampuan rendah, sedangkan tes pemahaman konsep matematika siswa digunakan untuk mengambil data tentang pemahaman konsep matematika siswa terkait materi turunan, serta wawancara digunakan untuk mengetahui secara mendalam tentang kemampuan pemahaman siswa terhadap konsep-konsep turunan dan triangulasi data penelitian yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Penelitian ini bersifat deskriptif, yaitu penelitian yang dilakukan untuk menggambarkan atau menjelaskan secara sistematis, faktual, dan akurat mengenai keadaan objek penelitian terkait kemampuan pemahaman konsep turunan siswa.

### A. Hasil Pemilihan Subjek

Subjek yang dipilih adalah siswa kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar Tahun Ajaran 2018/2019 yang berjumlah 31 orang siswa. Pemilihan subjek di kelas tersebut dilakukan dengan tujuan tertentu. Berdasarkan data kemampuan matematika siswa, maka dipilih 6 orang subjek dalam penelitian ini.

Adapun daftar nilai siswa kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar berdasarkan data kemampuan siswa pada materi turunan akan disajikan dalam tabel 4.1

**Tabel 4.1 Daftar Nilai Siswa Berdasarkan Kemampuan Matematika Siswa pada Materi Turunan**

No.	Nama Siswa	Nilai
1.	A. Muh. Idzam Al-Ghifarie	65
2.	Aldiansyah	55
3.	Alisha Maharani Shivananda AR	65
4.	Allatifa Tugarnisa Putri Dimas	60
5.	Andi Muh. Akil Aminuar	80
6.	Andi Nurul Falah Isjar Syamsuri	75
7.	Andi Pangeran Mahendra Jayanin	75
8.	Andita Rizalia	60
9.	Ariqah Arista Nurfaizah M.	80
10.	Ayumi Fatillah Camara Putri	70
11.	Dewa Agung Daeng Maraja	80
12.	Fahrezi Riga Rizaly	65
13.	Feysa Aleyda Rizal	75
14.	Ghina Fadilla	50
15.	Humairah Latifah	45
16.	Imam Adrian Rakhman	60
17.	Jenifer Putri Sianto	50
18.	Karimah	80

19.	Khaerani	60
20.	Kurniawan Adriansyah Syahrir	55
21.	Meilda Musdholifah Musakkir	60
22.	Muhammad Akram Ahmad	85
23.	Muhammad Shafaa Ulayya Dhaifullah	75
24.	Nafilah Khairiyah	75
25.	Nur Fadilah Ali Lisaw	85
26.	Putri Rumpati Bangsawan	55
27.	Rezki Meilani Putri	95
28.	Salsabila Alisyah	75
29.	Siti Nurhaliza Agussalim	60
30.	Yazeer Fatahillah	60
31.	Zalzabila Nurul Aulia	55

Berdasarkan hasil data kemampuan matematika siswa pada materi turunan, maka dipilih 6 subjek penelitian. Dari keenam siswa tersebut, dipilih masing-masing 2 orang siswa yang berkemampuan tinggi, sedang, dan rendah dengan rincian sebagai berikut

**Tabel 4.2 Subjek Terpilih**

No.	Kemampuan	Nama Siswa	Ket.
1.	Tinggi	Andi Muh. Akil Aminuar	S1a
2.		Rezki Meilani Putri	S1b
3.	Sedang	Ayumi Fatillah Camara Putri	S2a
4.		Muhammad Shafaa Ulayya Dhaifullah	S2b
5.	Rendah	Ghina Fadilla	S3a
6.		Putri Rumpati Bangsawan	S3b

## **B. Hasil Penelitian**

Pada bagian ini akan dideskripsikan data hasil penelitian tentang kemampuan pemahaman konsep berdasarkan teori APOS. Data penelitian dideskripsikan melalui petikan jawaban subjek yang diberikan kode dengan mengacu pada kode petikan jawaban dalam transkrip wawancara. Kode petikan jawaban subjek terdiri atas tujuh digit yang diawali dengan “S1”, “S2”, dan “S3”, yang menyatakan subjek berkemampuan tinggi (S1), subjek berkemampuan sedang (S2), dan subjek berkemampuan rendah (S3). Selanjutnya, pada digit ketiga merupakan subjek, yaitu “a” untuk subjek pertama dan “b” untuk subjek kedua. Digit keempat menyatakan nomor soal dan dua digit terakhir menyatakan petikan pertanyaan atau jawaban pada setiap soal. Misalnya petikan jawaban “S2a1b02” berarti subjek kemampuan sedang pertama pada soal nomor 1b untuk petikan atau jawaban kedua.

### **1. Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Siswa Berdasarkan Teori APOS**

#### **Soal 1.a**

*Tentukan turunan dari fungsi  $f(x) = x^4$  dengan menggunakan definisi*

#### **a. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a

$$\begin{aligned}
 1. a. & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - x^4}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \\
 &= 4x^3 + 0 + 0 + 0 = 4x^3
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.1 Jawaban Subjek S1a-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1a, terlihat bahwa subjek tersebut mengaitkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang menuliskan turunan sebagai limit suatu fungsi. Subjek juga menentukan  $f(x+h)$ , serta memilih dan menggunakan aturan-aturan pada konsep limit fungsi sehingga diperoleh  $f'(x)$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1a mengaitkan antara konsep turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1a mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P1a1a01* Bagaimana pemahaman Anda mengenai definisi turunan kaitannya dengan limit fungsi?

- S1a1a01* Definisinya itu yang pakai limit, misalnya ada fungsi  $f(x)$ , untuk mencari turunannya digunakan metode limit, dengan limit  $h$  mendekati 0,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ . Trus dari fungsinya ini kak, disubtitusimi sehingga nanti diperoleh hasilnya.
- P1a1a02* Kalau begitu, bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.1.a?
- S1a1a02* Pertama, kita tulis rumusnya, trus disubstitusi masuk nilainya. Setelah itu dijabarkan, karena  $h$  ada semua di setiap variabel, jadi dikeluarkan, trus dibagi. Setelah itu, ganti nilai  $h$  menjadi 0 sehingga diperoleh  $4x^3$ .
- P1a1a03* Jadi, apa yang bisa Anda simpulkan?
- S1a1a03* Jadi, untuk menyelesaikan turunan menggunakan definisi itu dengan menggunakan limit yaitu rumusnya limit  $h$  menuju 0,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1a mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1a1a01), serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur (S1a1a02). Dengan demikian, subjek S1a memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan.

#### **b. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a

① cari turunan turunan dari fungsi berikut  
 [a.]  $f(x) = x^9$  menggunakan definisi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^9 - x^9}{x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^9}{x} = 4x^8$$

**Gambar 4.2 Jawaban Subjek S1b-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1b, terlihat bahwa subjek tersebut mengaitkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang menuliskan turunan sebagai limit suatu fungsi. Akan tetapi, subjek tersebut tidak dapat menentukan nilai dari  $f(x + h)$ , dapat juga dilihat bahwa cara yang digunakan merupakan cara yang tidak tepat. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1b tidak memilih serta menggunakan aturan-aturan tertentu, baik aturan dalam menguraikan  $f(x + h)$  maupun aturan-aturan pada konsep limit fungsi dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Akan tetapi, subjek tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P1b1a01* Bagaimana Anda menyelesaikan soal 1.a dengan menggunakan definisi turunan?

*S1b1a01* Sebenarnya kak, nda tauka. Saya cuman tau yang cara menurunkannya. Kalau cara mencari definisinya pake limit

*betul-betul saya lupa kak. Jadi, awalnya saya cari dulu yang menggunakan aturan dasar, setelah itu berusaha arahkan supaya dapat jawabannya. Itumi kenapa tulis  $f(x + h)$  itu  $5x^4$ .*

*P1b1a02 Apakah cara Anda sudah tepat?  $f(x + h)$  nya yang mana?*

*S1b1a02 Itumi kak, saking saya lupanya jadi kuarahkan saja supaya begitu hasilnya.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Akan tetapi, subjek tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur (S1b1a01). Dengan demikian, subjek S1b memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan masih kurang.

### c. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2a)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a

$$\begin{aligned}
 & a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
 & \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh + h^3 \\
 & = 4x^3 + 6x^2(0) + 4x(0) + (0)^3 \\
 & = 4x^3
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.3 Jawaban Subjek S2a-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2a, terlihat bahwa subjek tersebut mengaitkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Hal ini dapat dilihat pada

jawaban subjek yang menuliskan turunan sebagai limit suatu fungsi. Subjek juga menentukan nilai dari  $f(x + h)$ , serta memilih dan menggunakan aturan-aturan pada konsep limit fungsi sehingga diperoleh  $f'(x)$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2a mengaitkan antara konsep turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2a mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P2a1a01 Bagaimana pemahaman Anda mengenai definisi turunan?*

*S2a1a01 Apa di' kak, yang ada limitnya. Itu limit  $h$  mendekati 0,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .*

*P2a1a02 Bagaimana Anda menyelesaikan soal 1.a dengan menggunakan definisi turunan?*

*S2a1a02 Strategi yang digunakan itu kak karena kan soalnya  $x^4$  jadi nanti dimasukkan menjadi  $(x + h)^4$  trus  $f(x)$  nya ini diganti menjadi  $x^4$ , trus dijabarkanmi, jadi nanti ini karena per  $h$ , jadi bisaji dicoret masing-masing yang ada  $h$  nya, sudah itu karena ini  $x^4 - x^4$  hasilnya 0 ji toh kak, sehingga begini hasilnya (sambil menunjuk jawabannya), baru nanti  $h$  nya diganti 0 karena limit  $h$  mendekati 0 sehingga jawabannya  $4x^3$ .*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2a mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar

(S2a1a01), serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur (S2a1a02). Dengan demikian, subjek S2a memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan.

#### d. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a

Nama : Muhammad Shafaa Ulayya Dhoifullah  
Kelas : XII MIPA 1

1. a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - x^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 = 4x^3 + 6x^2(0) + 4x(0)^2 + (0)^3 = 4x^3 + 0 + 0 + 0 = 4x^3$

**Gambar 4.4 Jawaban Subjek S2b-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2b, terlihat bahwa subjek tersebut mengaitkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang menuliskan turunan sebagai limit suatu fungsi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2b pada dasarnya mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Dalam menentukan  $f(x+h)$ , subjek S2b telah memilih aturan yang tepat akan tetapi, subjek S2b tidak menggunakan aturan tersebut dengan tepat, ini dapat dilihat pada hasil penjabaran  $f(x+h)$ . Selain itu, subjek S2b telah memilih dan menggunakan aturan pada limit fungsi dengan tepat. Ini dapat dilihat pada jawaban subjek, subjek menghilangkan simbol limit kemudian mengganti  $x$  dengan 0 sehingga diperoleh nilai  $f'(x)$ .

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan memanfaatkan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi. Akan tetapi, subjek tidak menggunakan aturan-aturan tertentu dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P2b1a01 Bagaimana pemahaman Anda mengenai definisi turunan kaitannya dengan limit fungsi?*

*S2b1a01 Itu yang fungsi  $x + h$ , baru dikurang dengan fungsi  $x$ , trus dibagi  $h$ .*

*P2b1a02 Coba perhatikan kembali jawaban Anda (sambil menunjuk jawaban siswa), bagaimana dengan hasil penguraian pada  $(x + h)^4$ ?*

*S2b1a02 Mmm...(berpikir), salah di' kak. Ada langkah yang hilang.*

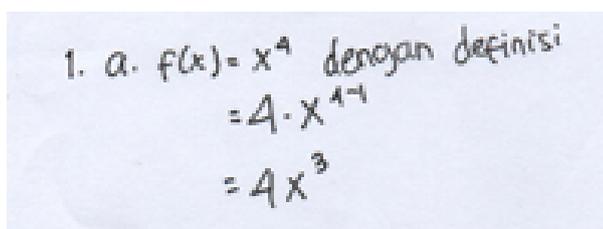
*P2b1a03 Langkah apa itu?*

*S2b1a03 Ini kak, salah penjabaranku (sambil menunjuk jawabannya dan membetulkan), harusnya itu  $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ ).*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S2b1a01), serta memilih dan memanfaatkan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi. Akan tetapi, subjek tidak menggunakan aturan-aturan tertentu dengan tepat sesuai dengan prosedur (S2b1a03). Dengan demikian, subjek S2b memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan masih kurang.

**e. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a



$$\begin{aligned}
 1. a. f(x) &= x^4 \text{ dengan definisi} \\
 &= 4 \cdot x^{4-1} \\
 &= 4x^3
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.5 Jawaban Subjek S3a-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3a, terlihat jelas bahwa subjek tersebut tidak menghubungkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Subjek tersebut menggunakan aturan pangkat untuk menyelesaikan soal, padahal petunjuk soal yang diberikan diperintahkan untuk menggunakan definisi turunan. Dari jawaban subjek, diperoleh bahwa subjek S3a tidak mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3a tidak mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P3a1a01      Bagaimana pemahaman Anda mengenai definisi turunan?*

*S3a1a01      Definisi pengertiannya seharusnya itu pake yang tambah h, trus yang ada h+1, kayak seperti itu, tapi disini saya kurang*

*paham bagaimana cara yang dikaitkan dengan soalnya yang  $f(x + h)$ . Jadi, saya mengerjakannya dengan menggunakan aturan dasar saja kak.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3a tidak mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3a1a01). Dengan demikian, subjek S3a tidak memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan.

#### f. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.a

$$\begin{aligned}
 1.) a.) f(x) &= x^4 \\
 \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = 4x^3 \\
 &= 4x^3 + 6x^2(0) + 4x(0)^2 + (0)^2 = 4x^3
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.6 Jawaban Subjek S3b-T1a**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3b, subjek tersebut mengaitkan definisi turunan dengan konsep limit fungsi. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang menuliskan turunan sebagai limit suatu fungsi. Subjek juga menentukan  $f(x + h)$ , serta memilih dan menggunakan aturan-aturan pada konsep limit fungsi sehingga

diperoleh  $f'(x)$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3b mengaitkan antara konsep turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P3b1a01 Bagaimana pemahaman Anda mengenai definisi turunan fungsi kaitannya dengan limit fungsi?*

*S3b1a01 Menurut saya, definisi turunan itu menggunakan metode penurunan limit dengan menggunakan rumus limit, yaitu dengan limit  $h$  mendekati 0,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .*

*P3b1a02 Kira-kira apa yang dapat Anda simpulkan dari jawaban soal no.1.a?*

*S3b1a02 Jadi, untuk menurunkan fungsi ini (sambil menunjuk soal no.1.a) harus menggunakan rumus limit yang tadi.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3b mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S3b1a01), serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3b1a02). Dengan demikian, subjek S3b memiliki pemahaman konsep pada tahap skema dalam memahami konsep turunan.

**Soal 1.b**

Tentukan turunan dari fungsi  $g(x) = \frac{4}{5}x^5$  dengan aturan dasar turunan

**a. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b

Handwritten solution showing the derivative of  $f(x) = \frac{4}{5}x^5$ . The student writes  $f(x) = \frac{4}{5}x^5$ , then  $f'(x) = \frac{4}{5} \cdot 5 x^{(5-1)}$ , and finally  $= 4x^4$ .

**Gambar 4.7 Jawaban Subjek S1a-T1b**

Pada jawaban subjek S1a di atas, terlihat bahwa subjek tersebut memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $f(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Dapat dilihat juga bahwa subjek langsung menggunakan aturan pangkat sesuai dengan informasi pada soal tanpa menuliskan rumus yang digunakan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P1a1b01* Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal 1.b?  
*S1a1b01* Misalnya ada  $x^n$ , maka turunannya itu  $n \cdot ax^{n-1}$ . Jadi kalau soalnya  $\frac{4}{5}x^5$ , turunannya itu 5 nya dikalikan ke depan, trus dikali dengan  $\frac{4}{5}x$ , trus pangkatnya  $5 - 1$ , sehingga hasilnya itu  $4x^4$ .

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1a1b01). Dengan demikian, subjek S1a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

#### **b. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) &= \frac{4}{3}x^5 \text{ dengan aturan dasar turunan} \\ &: n \cdot a^{n-1} \\ &: 5 \cdot \frac{4}{3}x^{5-1} = 4x^4 \end{aligned}$$

**Gambar 4.8 Jawaban Subjek S1b-T1b**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1b, terlihat bahwa subjek memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $f(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Terlebih dahulu subjek menuliskan rumus yang akan digunakan tanpa menuliskan makna simbol-simbol dalam rumus tersebut, meskipun masih terdapat kesalahan dengan tidak menuliskan “ $x$ ”. Setelah menuliskan rumus tersebut, subjek mengganti simbol-simbol tersebut dengan angka-angka sesuai dengan soal yang diberikan hingga akhirnya diperoleh jawaban dari soal tersebut. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P1b1b01* Bagaimana Anda menyelesaikan soal 1.b?

*S1b1b01* Jadi, awalnya itu kan ada rumusnya turunan kak  $n \cdot ax^{n-1}$ , sehingga 5 dikali  $\frac{4}{5}x$  habis itu pangkatnya 5 kurang 1 sehingga jawabannya  $4x^4$ .

*P1b1b02* Apa namanya kalau seperti ini model turunannya?

*S1b1b02* Aturan dasar kak (aturan pangkat).

*P1b1b03* Kalau begitu, bagaimana pemahaman Anda mengenai konsep aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi?

*S1b1b03* Itu rumusnya kak yang  $n \cdot ax^{n-1}$ .

*P1b1b04* Jadi, apa yang bisa disimpulkan?

*S1b1b04* Kesimpulannya kalau menggunakan aturan pangkat, pangkatnya diturunkan atau dikali ke depan habis itu dikali bilangannya, baru pangkatnya dikurang 1.

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1b1b01). Dengan demikian, subjek S1b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

### **c. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b

$$\textcircled{1} \text{ b) } g(x) = \frac{4}{5} x^5$$

$$g'(x) = 5 \cdot \frac{4}{5} x^{5-1}$$

$$= 4x^4$$

**Gambar 4.9 Jawaban Subjek S2a-T1b**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2a, terlihat bahwa subjek tersebut memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $g(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Dapat dilihat juga bahwa subjek langsung menggunakan aturan pangkat sesuai dengan informasi pada soal tanpa menuliskan rumus yang digunakan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P2a1b01 Bagaimana pemahaman Anda mengenai aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi?*

*S2a1b01 Aturan pangkat itu aturan dasar toh kak, jadi misalkan seperti ini (sambil menunjuk jawaban) pangkatnya dikasih ke depan, trus dikali dengan bilangannya baru pangkatnya dikurang 1.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S2a1b01).

Dengan demikian, subjek S2a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

**d. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b

$$b.) g(x) = \frac{4}{5} x^5 \Rightarrow g'(x) = 5 \cdot \frac{4}{5} x^{5-1} = 4x^4$$

**Gambar 4.10 Jawaban Subjek S2b-T1b**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2b, terlihat bahwa subjek tersebut memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $g(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Dapat dilihat juga bahwa subjek langsung menggunakan aturan pangkat sesuai dengan informasi pada soal tanpa menuliskan rumus yang digunakan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P2b1b01 Konsep apa yang digunakan pada soal no. 1.b?*

*S2b1b01 Aturan turunan dasar turunan (aturan pangkat) kak, yang rumusnya  $n \cdot ax^{n-1}$ .*

*P2b1b02 Kalau begitu, bagaimana Anda menyelesaikan soal 1.b?*

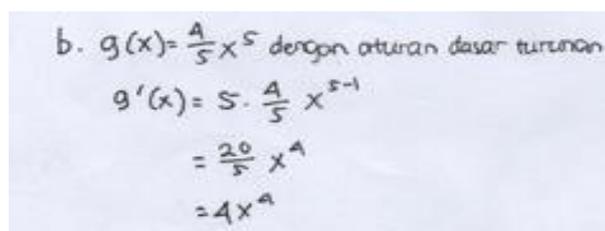
*S2b1b02 Kalau seperti ini kak, pangkatnya dikalikan ke depan, trus dikalikan dengan fungsinya, trus pangkatnya dikurang*

dengan 1. Dalam menyelesaikannya, digunakan aturan pangkat.

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S2b1b02). Dengan demikian, subjek S2b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

#### e. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3a)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b



$$\begin{aligned}
 \text{b. } g(x) &= \frac{4}{5}x^5 \text{ dengan aturan dasar turunan} \\
 g'(x) &= 5 \cdot \frac{4}{5} x^{5-1} \\
 &= \frac{20}{5} x^4 \\
 &= 4x^4
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.11 Jawaban Subjek S3a-T1b**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3a, terlihat bahwa subjek tersebut memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $g(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Dapat dilihat juga bahwa subjek langsung menggunakan aturan pangkat sesuai dengan informasi pada soal tanpa menuliskan rumus yang digunakan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P3a1b01* Bagaimana Anda menyelesaikan soal 1.b?

*S3a1b01* Jadi, kalau misalkan ada aturan pangkat, maka 5 nya dikurang dengan 1, trus 5 nya dikali ke depan kemudian dikali dengan  $\frac{4}{5}$  hasilnya  $\frac{20}{5}$  sama dengan 4, trus  $x^{5-1}$  jadi  $x^4$  sehingga  $4x^4$ .

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S3a1b01). Dengan demikian, subjek S3a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

#### f. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 1.b

$$\begin{aligned} \text{f.) b.) } g(x) &= \frac{4}{5} x^5 \\ g(x)' &= \frac{4}{5} (5) x^4 = 4x^4 \end{aligned}$$

**Gambar 4.12 Jawaban Subjek S3b-T1b**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3b, terlihat bahwa subjek tersebut memilih cara yang tepat dalam menentukan turunan dari  $g(x)$  dengan menerapkan aturan pangkat sesuai dengan prosedur. Dapat dilihat juga bahwa subjek langsung menggunakan aturan pangkat sesuai dengan informasi pada soal tanpa menuliskan rumus yang digunakan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3b menyatakan

ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar secara tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P3b1b01 Konsep apa yang digunakan pada no. 1.b?*

*S3b1b01 Aturan dasar turunan kak, atau aturan pangkat.*

*P3b1b02 Kalau begitu, bagaimana pemahaman adek mengenai aturan pangkat dalam menentukan turunan sebuah fungsi?*

*S3b1b02 Aturan pangkat itu langsung diturunkan sesuai dengan rumusnya kak.*

*P3b1b03 Jadi, bagaimana adek menyelesaikan soal 1.b?*

*S3b1b03 Jadi, misalnya pada soal  $\frac{4}{5}$  nanti dikalikan dengan pangkatnya trus pangkatnya dikurangkan dengan 1.*

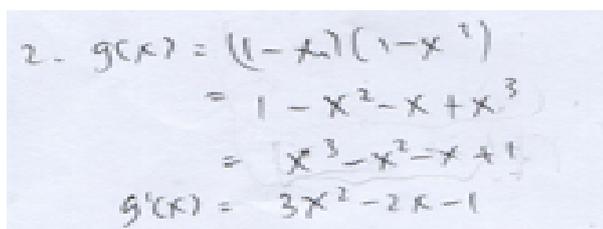
Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S3b1b03). Dengan demikian, subjek S3b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dalam memahami konsep turunan.

**Soal 2**

Tentukan turunan dari  $g(x) = (1 - x)(1 - x^2)$

**a. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2



$$\begin{aligned}
 2. \quad g(x) &= (1-x)(1-x^2) \\
 &= 1 - x^2 - x + x^3 \\
 &= x^3 - x^2 - x + 1 \\
 g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.13 Jawaban Subjek S1a-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1a, terlihat bahwa subjek terlebih dahulu menguraikan  $g(x)$  ke dalam penjumlahan beberapa suku. Setelah itu, subjek tersebut menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan. Jadi, subjek S1a menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan beberapa suku. Dalam menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan tersebut, subjek mengkombinasikannya dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, berdasarkan jawaban subjek, diperoleh bahwa subjek S1a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Selain itu, subjek S1a juga

menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar pada masing-masing suku.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1a menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku

*P1a201*      *Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.2?*

*S1a201*      *Kalau ini kak, terlebih dahulu dijabarkan baru diturunkan. Tapi, ada juga caranya yang pakai aturan perkalian kak.*

- Subjek S1a memilih dan memanfaatkan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar

*P1a202*      *Kalau begitu, manakah cara yang lebih mudah?*

*S1a202*      *Kalau saya, kalau misalkan pangkatnya sedikit, lebih mudah cara yang ini (aturan penjumlahan/pengurangan), tapi kalau banyak pangkatnya, sebaiknya pakai aturan perkalian.*

*P1a203*      *Apa saja syarat sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan untuk menentukan turunan sebuah fungsi?*

*S1a203*      *Fungsinya itu harus lebih dari satu kak dan bisa dijabarkan.*

- Subjek S1a menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P1a204*      *Coba perhatikan kembali jawaban adek, adakah cara berulang yang digunakan pada soal no.1.b?*

*S1a204*      *Aturan pangkatnya kak, karena setelah dijabarkan ada beberapa fungsi yang akan diturunkan.*

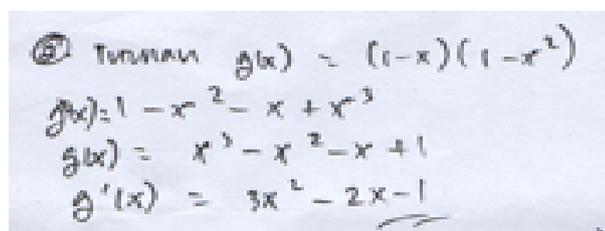
*P1a205*      *Bagaimana kesimpulan Anda?*

*S1a205 Kalau dari caraku kak, kalau seperti ini soalnya bisaji langsung dijabarkan baru diturunkan. Tapi, kalau misalkan soalnya berpangkat 5, nda bisa digunakan pake cara itu (sambil menunjuk jawabannya). Tapi, yang digunakan itu aturan rantai.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1a204); subjek S1a juga menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku (S1a201); serta subjek S1a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S1a205). Dengan demikian, subjek S1a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

#### **b. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Turunan } g(x) &= (1-x)(1-x^2) \\ g(x) &= 1 - x^2 - x + x^3 \\ g(x) &= x^3 - x^2 - x + 1 \\ g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

**Gambar 4.14 Jawaban Subjek S1b-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1b, terlihat bahwa subjek terlebih dahulu menguraikan  $g(x)$  ke dalam penjumlahan beberapa suku. Setelah itu, subjek

tersebut menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan. Jadi, subjek S1b menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan beberapa suku. Dalam menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan tersebut, subjek mengkombinasikannya dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, berdasarkan jawaban subjek, diperoleh bahwa subjek S1b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Selain itu, subjek S1b juga menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar pada masing-masing suku.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1b menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku

*P1b201            Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.2?  
S1b201            Caranya ini kak, ku kali ke dalam dulu setelah itu  
                         kusesuaikan dengan pangkat tertinggi dulu baru kuturunkan  
                         kak pake aturan pangkat.*

- Subjek S1b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang

dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P1b202*      *Kenapa menggunakan cara itu? Adakah cara lain untuk selesaikan soal no.2?*

*S1b202*      *Bisa pake perkalian kak, tapi aturan penjumlahan/pengurangan kurasa lebih singkat baru langsungji kak, dibanding pake aturan perkalian lagi, lebih susah dijabarkan lagi kak.*

*P1b203*      *Bandingkan dengan soal 1.b, adakah kaitannya?*

*S1b203*      *Iye kak, karena ada proses yang diulangi, itumi aturan pangkatnya kak.*

*P1b204*      *Jadi, apa kesimpulan Anda?*

*S1b204*      *Kesimpulanku saya, kalau misalnya mengerjakan soal seperti ini bisa digunakan dua cara, pake aturan penjumlahan/pengurangan, bisa juga pake aturan perkalian.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1b203); subjek S1b juga menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku (S1b201); serta subjek S1b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S1b202). Dengan demikian, subjek S1b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

**c. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad g(x) &= (1-x)(1-x^2) \\
 g'(x) &= (-1)(1-x^2) + (1-x)(-2x) \\
 &= -1 + x^2 + (-2x + 2x^2) \\
 &= x^2 - 1 - 2x + 2x^2 \\
 &= 3x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.15 Jawaban Subjek S2a-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2a, terlihat bahwa subjek mengidentifikasi  $g(x)$  sebagai perkalian dari dua buah fungsi sehingga subjek menggunakan aturan perkalian, meskipun subjek tersebut tidak menuliskan rumusnya akan tetapi pada dasarnya subjek memilih dan menggunakan prosedur aturan perkalian dengan tepat. Dalam menggunakan aturan perkalian, subjek menerapkan aturan penjumlahan untuk menentukan turunan dari kedua fungsi yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2a menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat, memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur, mengidentifikasi bentuk suatu fungsi aljabar sebagai hasil kali dari dua buah fungsi dengan tepat, serta mampu memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan perkalian dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2a mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P2a201*      *Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.2? Kenapa memilih cara tersebut?*

*S2a201*      *Cara yang waktuku kelas 2 kuingat kak, itu yang u dan v. Pas kuliati soalnya kak, iniji cara langsung kupikir.*

- Subjek S2a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi) yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P2a202*      *Coba bandingkan dengan soal 1.b, adakah kaitannya? Adakah cara berulang yang digunakan?*

*S2a202*      *Kalau soal 1.b dengan soal no.2, berulangki aturan pangkat yang digunakan toh kak.*

*P2a203*      *Jadi, bagaimana kesimpulan Anda?*

*S2a203*      *Kalau ini kak, kuselesaikan pake aturan perkalian. Kalau ada dua buah fungsi, cari dulu turunannya masing-masing, itu bisa dikerjakan pake aturan perkalian, jadi diingatti dulu rumusnya, trus kasih masukmi turunannya. Tapi, bisaji juga dikerjakan pake aturan penjumlahan/pengurangan, bahkan lebih mudahki.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S2a202); subjek S2a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan

penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S2a203); subjek S2a mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S2a201); serta subjek S2a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2a203). Dengan demikian, subjek S2a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi, proses, dan objek dalam memahami konsep turunan.

#### d. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2

$$2. g(x) = (1-x)(1-x^2) \rightarrow (-1)(1-x^2) + (1-x)(-2x) = x^2 - 1 + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 2x - 1$$

**Gambar 4.16 Jawaban Subjek S2b-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2b, terlihat bahwa subjek mengidentifikasi  $g(x)$  sebagai perkalian dari dua buah fungsi sehingga subjek menggunakan aturan perkalian, meskipun subjek tersebut tidak menuliskan rumusnya akan tetapi pada dasarnya subjek memilih dan menggunakan prosedur aturan perkalian dengan tepat. Dalam menggunakan aturan perkalian, subjek menerapkan aturan penjumlahan untuk menentukan turunan dari kedua fungsi yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat

sesuai dengan prosedur. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2b menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat; memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur, mengidentifikasi bentuk suatu fungsi aljabar sebagai hasil kali dari dua buah fungsi dengan tepat, serta memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan perkalian dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P2b201            Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.2?*

*S2b201            Saya pakai aturan perkalian kak.*

*P2b202            Kalau begitu, apa itu aturan perkalian dek?*

*S2b202            Itu yang  $u'v + uv'$ .*

- Subjek S2b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi) yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

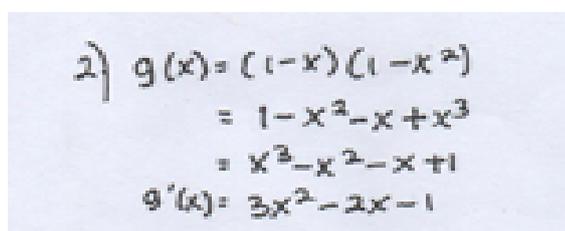
*P2b203            Bandingkan dengan soal 1.b, dapatkah Anda menemukan kaitannya? Adakah cara berulang yang digunakan?*

*S2b203            Iye kak, aturan pangkatnya.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S2b203); subjek S2b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; subjek S2b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S2b202); serta subjek S2b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2b203). Dengan demikian, subjek S2b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi, proses, dan objek dalam memahami konsep turunan.

**e. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2



Handwritten mathematical solution for a derivative problem. The student starts with the function  $g(x) = (1-x)(1-x^2)$  and expands it to  $1 - x^2 - x + x^3$ . Then, they differentiate term by term to get  $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ .

$$\begin{aligned} 2) \quad g(x) &= (1-x)(1-x^2) \\ &= 1 - x^2 - x + x^3 \\ &= x^3 - x^2 - x + 1 \\ g'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

**Gambar 4.17 Jawaban Subjek S3a-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3a, terlihat bahwa subjek terlebih dahulu menguraikan  $g(x)$  ke dalam penjumlahan beberapa suku. Setelah itu, subjek tersebut menggunakan aturan penjumlahan. Jadi, subjek S3a menyajikan fungsi

aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan beberapa suku. Dalam menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan tersebut, subjek mengkombinasikannya dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, berdasarkan jawaban subjek, diperoleh bahwa subjek S3a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Selain itu, subjek S1a juga menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar pada masing-masing suku.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3a menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku

*P3a201*      *Konsep apa yang digunakan pada no. 2?*

*S3a201*      *Saya pakenya konsep yang diperkalikan dahulu antara dalam kurung yang lain sehingga saya dapat hasilnya  $1 - x^2 - x - x^3$  baru diturunkan seperti cara yang tadi (menunjuk jawaban pada 1.b).*

- Subjek S3a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

- P3a202*      *Jadi, kalau seperti ini aturan apa yang digunakan?*  
*S3a202*      *Aturan ..... (berpikir) penjumlahan/pengurangan kak, tapi diurutkan sesuai pangkat yang tertinggi.*  
*P3a203*      *Apa saja syaratnya sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan untuk menentukan turunan sebuah fungsi?*  
*S3a203*      *Eee.... (berpikir) terdiri dari dua fungsi kak.*  
*P3a204*      *Jadi, apa yang bisa adek simpulkan?*  
*S3a204*      *Kesimpulannya, kalau ada soal seperti ini yang pertama dilakukan itu disederhanakan sebelum diturunkan, kemudian disusun dari pangkat tertinggi, setelah itu baru bisa diturunkan.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S3a juga menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku (S3a201); serta subjek S3a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3a204). Dengan demikian, subjek S3a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

#### **f. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 2

2.)  $(1-x)(1-x^2)$   
 $\Rightarrow 1 - x^2 - x + x^3 = x^3 - x^2 - x + 1$   
 $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

**Gambar 4.18 Jawaban Subjek S3b-T2**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3b, terlihat bahwa subjek terlebih dahulu menguraikan  $g(x)$  ke dalam penjumlahan beberapa suku. Setelah itu, subjek tersebut menggunakan aturan penjumlahan. Jadi, subjek S3b menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan. Dalam menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan tersebut, subjek mengkombinasikannya dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, berdasarkan jawaban subjek, diperoleh bahwa subjek S3b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Selain itu, subjek S3b juga menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar pada masing-masing suku.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3b menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku

*P3b201      Konsep apa yang digunakan pada soal no.2?*

- S3b201 Aturan.... (berpikir) yang disubstitusikan langsung kak atau dikali masuk kak (aturan penjumlahan/pengurangan).*
- P3b202 Sekarang, bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.2?*
- S3b202 Kan soalnya kak,  $g(x) = (1 - x)(1 - x^2)$ . Ini langsung dikalikan masukki sehingga hasilnya nanti  $1 - x^2 - x + x^3$ , kemudian disederhanakan kak, baru nanti hasilnya dioperasikan kak.*

- Subjek S3b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

- P3b203 Kenapa pake cara itu? (sambil menunjuk jawaban subjek pada soal no.2)*
- S3b203 Karena kalau cara ini tidak rumitji kak.*
- P3b204 Kalau begitu, apa saja syarat yang harus dipenuhi sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan untuk menentukan turunan?*
- S3b204 Tergantung dari soalnya kak, kalau misalnya memenuhi syarat yang terdiri dari dua buah fungsi kak.*
- P3b205 Coba perhatikan jawaban adek pada no.2 (sambil menunjuk), apa kaitannya dengan soal pada no. 1.b?*
- S3b205 Kalau di no.2 kak, kan seperti inimi hasilnya (menunjuk jawaban soal no.2), jadi langsungmi diturunkan pake aturan dasar turunan sehingga pada no.2 berulangki aturan dasar turunannya kak.*
- P3b206 Jadi, apa yang bisa disimpulkan?*
- S3b206 Pada no.2 ini menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan, kemudian dari situ digunakan lagi aturan dasar turunan kak.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S3b205);

subjek S3b juga menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku (S3b202); serta subjek S3b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3b206). Dengan demikian, subjek S3b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

### Soal 3

Tentukan turunan dari  $g(x) = \left(\frac{x(1+x)}{1-x}\right)^2$

#### a. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1a)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

3.  $g(x) = \left(\frac{x(1+x)}{1-x}\right)^2$

$g(x) = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{x^2 - 2x + 1} \rightarrow v \quad v' = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

$x^2 - 2x + 1 \rightarrow w \quad w' = 2x - 2$

$g'(x) = \frac{v'w - w'v}{w^2}$

$= \frac{(4x^3 + 6x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 1) - (x^4 + 2x^3 + x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

$= \frac{(4x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 6x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 2x)(x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 2x^4 - 4x^5 - 2x^2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

$\Rightarrow \frac{2x^5 - 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

**Gambar 4.19 Jawaban Subjek S1a-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1a, terlihat bahwa subjek mengubah bentuk fungsi  $g(x)$  dengan mengkuadratkannya. Dengan hasil tersebut, subjek mengidentifikasi  $g(x)$  sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi aljabar lainnya sehingga dapat dikatakan bahwa subjek mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat. Dari jawaban tersebut, dapat dilihat bahwa subjek menuliskan rumus aturan hasil bagi dan juga dapat dilihat bahwa pada dasarnya subjek memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur-prosedur aturan pembagian dengan tepat untuk menentukan turunan fungsi  $g(x)$ . Dalam menggunakan aturan pembagian, subjek menerapkan aturan penjumlahan untuk menentukan turunan dari kedua fungsi yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1a menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat; serta subjek memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Selain itu, subjek mengidentifikasi bentuk suatu fungsi aljabar sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi dengan tepat, serta memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan pembagian dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1a mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P1a301 Aturan-aturan apa saja yang bisa digunakan pada soal no.3?*

*S1a301 Bisa pakai aturan pembagian, tapi dijabarkan terlebih dahulu baru ditentukan nilai  $u$  dan  $v$ . Setelah itu, baru diturunkan. Tapi, bisa juga pakai aturan rantai kak.*

- Subjek S1a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi) yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P1a302 Pada soal no.3, adakah kaitannya dengan soal sebelumnya?*

*S1a302 Kan di no. 3 itu kak, kuselesaikan pakai aturan pembagian, jadi untuk menurunkan fungsinya, otomatis pake aturan dasarki dulu untuk capai aturan pembagiannya yang tadi.*

*P1a303 Jadi, apa yang bisa adek simpulkan?*

*S1a303 Berdasarkan jawaban saya, untuk menyelesaikan soal no.3, digunakan aturan pembagian, dimana ditentukan dulu turunan dari fungsi pembilang dan penyebutnya, kemudian dimasukkan pada rumus.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (S1a302); subjek S1a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; subjek S1a juga

mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S1a301); serta subjek S1a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S1a303). Dengan demikian, subjek S1a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi, proses, dan objek dalam memahami konsep turunan.

#### b. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

The image shows a handwritten solution for finding the derivative of the function  $g(x) = \left(\frac{x(1+x)}{1-x}\right)^2$ . The student identifies  $g(x) = \left(\frac{u}{v}\right)^2$  and uses the quotient rule  $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ . They define  $u = x^4 + 2x^3 + x^2$  and  $v = x^2 - 2x + 1$ , then calculate  $u' = 4x^3 + 6x^2 + 2x$  and  $v' = 2x - 2$ . The final derivative is given as  $g'(x) = \frac{(4x^3 + 6x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 1) - (x^4 + 2x^3 + x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$ .

**Gambar 4.20 Jawaban Subjek S1b-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1b, terlihat bahwa subjek mengubah bentuk fungsi  $g(x)$  dengan mengkuadratkannya. Dengan hasil tersebut, subjek mengidentifikasi  $g(x)$  sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi aljabar lainnya sehingga dapat dikatakan bahwa subjek mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat. Dari jawaban tersebut, dapat dilihat bahwa subjek menuliskan rumus aturan hasil bagi dan juga dapat dilihat bahwa pada dasarnya

subjek memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur-prosedur aturan pembagian dengan tepat untuk menentukan turunan fungsi  $g(x)$ , meskipun hasil yang diperoleh masih dapat disederhanakan. Dalam menggunakan aturan pembagian, subjek menerapkan aturan penjumlahan untuk menentukan turunan dari kedua fungsi yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S1b menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat; memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; mengidentifikasi bentuk suatu fungsi aljabar sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi dengan tepat, serta memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan pembagian dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P1b301*            *Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.3?*

*S1b301*            *Kalau yang di no.3 kak, saya pake aturan pembagian.*

*P1b302*            *Adakah cara lain untuk selesaikan soal no.3?*

*S1b302*            *Mmmm.... (berpikir) yang pake aturan rantai kak.*

- Subjek S1b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi)

*P1b303*      *Kenapa memilih strategi tersebut?*

*S1b303*      *Kalau yang di no.3 kak, saya pake aturan pembagian. Jadi, pertama-tama dulu kan disini pangkat duaki, jadi saya pangkat duakanki dulu, trus saya jabarkanmi yang mana u sma v nya kak. Baru kucarimi turunannya u dan v kak. Setelah itu, kumasukkanmi ke rumus pembagian. Baru pernah guruku bilang, kalau panjang begini hasilnya (sambil menunjuk jawabannya) nda usahmi disederhanakan lagi.*

*P1b304*      *Jadi, bagaimana kesimpulan Anda?*

*S1b304*      *Kesimpulanku kak, kalau mau selesaikan soal begini bisa pakai cara yang dipangkat duakan dulu baru dimasukkan ke aturan pembagian, bisa juga pakai aturan rantai kak.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S1b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; serta subjek S1b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S1b301); subjek S1b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S1b303). Dengan demikian, subjek S1b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi, proses, dan objek dalam memahami konsep turunan.

**c. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} g(x) &= \left( \frac{x+x^2}{1-x} \right)^2 \\
 g'(x) &= 2 \left[ \frac{[(1+x)[1-x] - [x+x^2](-1)]}{(1-x)^2} \right] \\
 &= 2 \left[ \frac{(1+2x-x-2x^2) - (-x-x^2)}{(1-x)^2} \right] \\
 &= 2 \left[ \frac{1+2x-2x^2+x+x^2}{(1-x)^2} \right] \\
 &= 2 \left[ \frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2} \right]
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.21 Jawaban Subjek S2a-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2a, terlihat bahwa subjek hendak menggunakan aturan rantai dalam menentukan turunan dari  $g(x)$ . Akan tetapi, subjek tidak menggunakan prosedur-prosedur aturan rantai dengan tepat. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang tidak menuliskan fungsi dalam pangkat setelah turunan dari fungsi tersebut. Meskipun tidak dituliskan, dapat dilihat bahwa dalam menentukan turunan fungsi dalam pangkat, subjek terlebih dahulu mengidentifikasi fungsi tersebut sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi. Selain itu, subjek juga menggunakan aturan pembagian dengan tepat. Dalam penggunaan aturan pembagian, subjek menggunakan aturan penjumlahan dalam menentukan turunan fungsi pada pembilang dan penyebut yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan

tepat. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S2a menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat; memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; mengklasifikasi serta mengidentifikasi bentuk fungsi sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi dengan tepat, serta memilih, memanfaatkan dan menggunakan prosedur-prosedur aturan pembagian dengan tepat. Akan tetapi, subjek S2a tidak memanfaatkan dan menggunakan aturan rantai dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2a mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P2a301            Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.3?  
Cara apa yang Anda gunakan?*

*S2a301            Aturan rantai kah itu namanya kak.*

- Subjek S2a memilih aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi. Akan tetapi, subjek tidak memanfaatkan dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi)

*P2a302            Nah, itu. Aturan rantai. Trus, apa saja syarat sehingga aturan rantai dapat digunakan?*

- S2a302 Nda terlalu tauka kak jelaskan. Tapi, kalau misalnya seperti ini soalnya yang di luar pangkatnya, baru fungsinya berada dalam kurung biasanya dikerjakan pakai aturan rantai kak. Karena kalau nda adaji dalam kurungnya kak, baru satuji fungsinya, bisaji kakerjakan pakai aturan sederhana, itu yang langsung kak.*
- P2a303 Coba perhatikan kembali jawabannya adek, apakah langkah yang digunakan sudah tepat?*
- S2a303 Mmm... hehehe (sambil tersenyum). Salah kak. Harusnya itu kkalikan ke depan duanya, sudah itu di kali dengan fungsinya, baru dikalikan dengan turunan dari fungsi itu sendiri.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S2a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; subjek S2a juga mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi (S2a301); serta subjek S2a memilih aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2a302). Akan tetapi, subjek tidak memanfaatkan dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2a303). Dengan demikian, subjek S2a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi, proses, dan objek dalam memahami konsep turunan, meskipun pada tahap objek pemahaman subjek masih kurang.

**d. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan sedang (S2b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

$$\begin{aligned}
 3. \quad g(x) &= \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^2 \\
 g'(x) &= 2 \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^{2-1} \left( \frac{[1+2x][1-x] - [x(1+x)][-1]}{(1-x)^2} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{[1+2x-x-2x^2] - [-x^2-x]}{(1-x)^2} \right) \left( \frac{x^2+x}{1-x} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{x^2+x}{1-x} \right) \left( \frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2} \right) = 2 \left( \frac{-x^3+2x^2+x-x^4+2x^3+x^2}{(1-x)^3} \right) \\
 &= 2 \left( \frac{-x^4+x^3+3x^2+x}{(1-x)^3} \right) = \frac{2(-x^4+x^3+3x^2+x)}{(1-x)^3}
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.22 Jawaban Subjek S2b-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2b, terlihat bahwa subjek hendak menggunakan aturan rantai dalam menentukan turunan dari  $g(x)$ . Dari jawaban subjek tersebut, dapat dilihat bahwa subjek memilih dengan tepat prosedur-prosedur aturan rantai dalam menentukan turunan fungsi. Akan tetapi, pada langkah akhir subjek salah dalam menuliskan jawaban pada bagian penyebut. Meskipun tidak dituliskan, tetapi dapat dilihat bahwa dalam menentukan turunan fungsi dalam pangkat, subjek terlebih dahulu mengidentifikasi fungsi tersebut sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi. Selain itu, subjek menggunakan prosedur-prosedur aturan pembagian dengan tepat. Dalam penggunaan aturan pembagian, subjek juga menggunakan aturan penjumlahan dalam menentukan turunan fungsi pada pembilang dan penyebut yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat. Jadi, dapat disimpulkan

bahwa subjek S2b menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar dengan tepat; memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; mengklasifikasi serta mengidentifikasi bentuk fungsi sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi serta komposisi dari dua buah fungsi dengan tepat dan subjek memilih prosedur-prosedur aturan pembagian dengan tepat. Akan tetapi, subjek tidak memanfaatkan dan menggunakan prosedur aturan rantai dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P2b301            Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.3?  
S2b301            Saya gunakan aturan rantai kak. Baru dijabarkan pake rumusnya, sehingga bisa didapat hasilnya seperti ini kak (menunjuk jawaban pada no.3).*

- Subjek S2b memilih aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi. Akan tetapi, subjek tidak memanfaatkan dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi)

*P2b302            Apa saja syarat yang harus dipenuhi sehingga aturan rantai dapat digunakan?  
S2b302            Kalau fungsi di dalamnya bisa diturunkan kak.*

- P2b303*      *Coba perhatikan kembali jawabannya dek, apakah sudah tidak ada kesalahan?*
- S2b303*      *(subjek memperhatikan jawaban) Apa di' kak, jawaban akhirnya kak, harusnya tetap di luar pangkat 3 nya.*
- P2b304*      *Jadi, apa yang bisa Anda simpulkan?*
- S2b304*      *Kesimpulannya kak, cara yang digunakan itu menggunakan aturan rantai. Nah, kalau soalnya seperti ini, juga digunakan aturan pembagian dalam menurunkan fungsi tersebut.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S2b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; serta subjek S2b mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S2b301); subjek S2b juga memilih aturan/prosedur tertentu sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2b302). Akan tetapi, subjek tidak memanfaatkan dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (S2b303).

#### **e. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

$  \begin{aligned}  3) \quad g(x) &= \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^2 \\  &= \left( \frac{x+x^2}{1-x} \right)^2 \\  &= \left( \frac{x^2+x^4}{1-x^2} \right) \\  g'(x) &= \left( \frac{2x+4x^3}{1-2x} \right) \\  &= \left( \frac{2x+4x^3}{1-2x} \right) \\  &= \left( \frac{4x^3}{1} \right) \\  &= 4x^3  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  3) \quad g(x) &= \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^2 \\  &= \frac{(x^2(1+x)^2)}{(1-x)^2} \\  &= \frac{x^2(1+2x+x^2)}{1-2x+x^2} \\  &= \frac{(x^2+2x+1)x^2}{x^2+2x-1} \\  &= \frac{x^4+2x^3+x^2}{x^2+2x-1} \\  g'(x) &= \frac{4x^3+6x^2+2x}{2x+2} \\  &= \frac{4x^3+6x^2}{2} = 2x^3+3x^2  \end{aligned}  $
---	---

**Gambar 4.23 Jawaban Subjek S3a-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3a, terlihat bahwa ada dua jawaban yang berbeda. Dari kedua jawaban subjek tersebut, subjek mengubah bentuk fungsi ke dalam bentuk hasil bagi dari dua buah fungsi. Pada jawaban bagian kanan, subjek menggunakan prosedur yang tepat, sedangkan pada jawaban bagian kiri terlihat bahwa subjek menggunakan prosedur yang tidak tepat. Selanjutnya, dalam menentukan turunan dari  $g(x)$ , subjek terlebih dahulu menentukan turunan dari fungsi pada pembilang dan penyebut. Kemudian, subjek menuliskan turunan dari  $g(x)$  sebagai hasil bagi dari turunan pembilang dan juga penyebut. Hal ini menunjukkan bahwa subjek menggunakan prosedur yang tidak tepat. Subjek seharusnya menggunakan aturan pembagian setelah menyatakan  $g(x)$  sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi. Namun, dalam menentukan turunan pembilang dan penyebut, subjek menerapkan aturan penjumlahan/pengurangan yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3a tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali, maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat.

Akan tetapi, subjek S3a menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3a tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali, maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P3a301            Bagaimana cara adek mengerjakan soal no.3?*

*S3a301            Ada dua pilihan jawabanku kak*

*P3a302            Apakah penyelesaian adek sudah benar?*

*S3a302            Saya juga bingung kak dengan jawabanku, hehehe*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S3a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur. Akan tetapi, subjek S3a tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali, maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat (S3a302). Dengan demikian, subjek S3a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

**f. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3b)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 3

$$\begin{aligned}
 3) \frac{U' \cdot V - UV'}{V^2} &= \frac{(2x+1)(1-x) - (x+x^2)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(2x-2x^2+1-x) + x+x^2}{x^2-2x+1} \\
 &= \frac{-x^2+2x+1}{x^2-2x+1}
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.24 Jawaban Subjek S3b-T3**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3b, terlihat bahwa subjek mengidentifikasi fungsi  $f(x)$  sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi dengan tidak tepat sehingga dapat dikatakan bahwa subjek tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali, maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat. Dalam menggunakan aturan pembagian, subjek menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3b menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan fungsi aljabar; serta memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3b tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat

*P3b301*      *Coba perhatikan jawaban adek, dari sini bagaimana strategi yang digunakan dalam menyelesaikan soal ini?*

*S3b301*      *Kalau saya toh kak, kan disini soalnya ada bentuk pembagian. Jadi, kgunakan rumus pembagian kak. Tapi, kalau kulihat kak, salahki caraku ini. Harusnya kukalikanki pangkat duanya, kemudian ku turunkanmi kak*

- Subjek S3b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur

*P3b302*      *Kalau begitu, apa kaitannya antara soal ini dengan soal sebelumnya?*

*S3b302*      *Kan kalau disini kak (sambil menunjuk jawaban yang sudah dikerjakan) pake aturan rantai, ada juga aturan dasar turunannya yang berulang kak*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S3b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3b302); subjek S3b tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat

tertentu dengan tepat (S3b301). Dengan demikian, subjek S3b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses dalam memahami konsep turunan.

#### **Soal 4**

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  pada  $[-2,3]$  serta tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis singgung di titik maksimumnya (jika ada)

#### **a. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 4

The image shows two columns of handwritten mathematical work. The left column solves for the maximum and minimum of the function  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  on the interval  $[-2, 3]$ . It starts with  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  and  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Setting  $f'(x) = 0$  gives  $3x^2 - 3 = 0$ ,  $x^2 = 1$ , and  $x = \pm 1$ . It then evaluates  $f(1) = 1^3 - 3(1) - 4 = -6$  (labeled as a minimum) and  $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 4 = -2$ . It also evaluates the endpoints:  $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 4 = -6$  (labeled as a minimum) and  $f(3) = 3^3 - 3(3) - 4 = 14$  (labeled as the maximum). The right column finds the equation of a line perpendicular to the tangent at the maximum point  $(1, -6)$ . It starts with  $f'(x) = 3x^2 - 3$  and  $f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$ . It notes the gradient  $m = 0$  and the slope of the perpendicular line  $m_2 = -\frac{1}{0}$ . It then uses the point-slope form  $y - y_1 = m(x - x_1)$  to find the equation of the line, which is  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{25}{3}$ .

**Gambar 4.25 Jawaban Subjek S1a-T4**

Pada jawaban tes tertulis subjek S1a, terlihat bahwa subjek S1a mengaplikasikan konsep turunan dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi pada suatu interval tertentu. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang terlebih dahulu menentukan turunan dari  $f'(x)$ , kemudian menentukan nilai-

nilai  $x$  yang memenuhi sehingga  $f'(x) = 0$ . Setelah itu, subjek memilih dengan tepat titik-titik uji yang akan disubstitusi ke fungsi untuk menentukan titik maksimum dan minimum fungsi tersebut. Dalam menentukan turunan dari  $f(x)$ , subjek S1a juga memilih dan menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat. Akan tetapi, dari jawaban tersebut dapat dilihat bahwa subjek S1a salah dalam memahami soal. Subjek menganggap bahwa garis yang ditanyakan pada soal melalui  $(-2,3)$  padahal harusnya garis tersebut melalui titik maksimumnya yaitu  $(3,14)$  sehingga subjek S1a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung, tetapi dengan prosedur yang tidak tepat.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut

*P1a401            Bagaimana strategi Anda dalam menyelesaikan soal no.4?  
S1a401            Pertama itu, dalam menentukan nilai maksimum dan minimum, tentukan dulu turunannya dari fungsi yang diketahui, kemudian sama dengan 0 kan hingga didapat nilai  $x$  nya atau titik stationernya. Setelah itu, titik stationernya disubstitusi ke persamaan awal untuk mencari nilai maksimum dan minimum, trus titik puncaknya juga disubstitusi. Dari situ dicarimi yang mana nilai tertinggi dan terendah, baru ditentukan nilai maksimumnya.*

- Subjek S1a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung tetapi dengan prosedur yang tidak tepat

*P1a402* *Coba perhatikan kembali jawaban adek, kenapa nilai  $-2$  yang digunakan disini? (sambil menunjuk jawaban siswa)*

*S1a402* *Karena kan  $f(x)$ . Jadi, pemahamanku itu  $-2$  itu nilai  $x$  nya dan  $3$  itu nilai  $y$  nya. Itumi kenapa kusubstitusi disini kak (sambil menunjuk jawabannya). Setelah itu, diperoleh gradiennya  $9$ . Karena tegak lurus, maka gradiennya itu  $-\frac{1}{9}$ , trus kusubstitusimi nilainya  $-2$  dan  $3$  ke persamaan garis lurus kak.*

- Subjek S1a mengaitkan konsep turunan dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis

*P1a403* *Jadi, apa yang bisa disimpulkan?*

*S1a403* *Ini soalnya termasuk aplikasi turunan, jadi haruski dulu cari apa-apa yang diketahui dan ditanyakan, baru diselesaikan dengan rumus-rumus yang seharusnya. Pada soal no.4, soalnya itu mencari nilai maksimum dan minimum, jadi diturunkan dulu nilai  $f(x)$  itu sendiri. Kemudian, dari hasilnya di sama dengan  $0$  kan, trus dicari nilai stationernya. Dari situ disubstitusi ke persamaan awal untuk mencari nilai maksimum dan minimum. Sedangkan untuk mencari persamaan garis, karena di soalnya kan tegak lurus, maka gradien pertama dikali dengan gradien kedua sama dengan  $-1$ , trus dari situ disubstitusi masuk nilai gradien dan nilai maksimum yang diperoleh tadi sehingga didapat persamaan garis singgung di titik maksimumnya*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S1a memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan

penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; subjek S1a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut (S1a401); subjek S1a juga mengaitkan konsep turunan dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis (S1a403). Akan tetapi, subjek mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung dengan prosedur yang tidak tepat (S1a402). Dengan demikian, subjek S1a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses. Namun, pada tahap skema pemahaman konsep siswa masih kurang dalam memahami konsep turunan.

#### b. Jawaban Subjek Berkemampuan Tinggi (S1b)

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan tinggi (S1b) dalam menyelesaikan soal pada nomor 4

4. Nilai maksimum dan minimum  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  pada  $(-2, 3)$  dan persamaan garis singgung di titik maksimum.

Nilai maksimum & minimum  
 $f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 - 3(-\frac{1}{3}) - 4 = -\frac{1}{27} + 1 - 4 = -\frac{10}{27}$  (titik)

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 4 = -8 + 6 - 4 = -6$  (nilai minimum)

$f(1) = (1)^3 - 3(1) - 4 = -6$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) - 4 = -4$  (titik maksimum)

$f(3) = 3^3 - 3(3) - 4 = 27 - 9 - 4 = 14$  (nilai maksimum)

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$   
 $= 3(x+1)(x-1)$   
 $= (3x+3)(x-1)$   
 $x = -1 \quad x = 1$

$\frac{-1}{3} \quad 1$

Titik maksimum  $(x_p, y_p) = x_p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(3)} = \frac{3}{6} = 0,5$

$\hookrightarrow$  kelengkapan  
 $y_p = \frac{D}{4ac} = \frac{b^2 - 4ac}{4ac} = \frac{9 - 12}{-12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Gambar 4.26 Jawaban Subjek S1b-T401

Pada jawaban tes tertulis subjek S1b, terlihat bahwa subjek S1b mengaplikasikan konsep turunan dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi pada suatu interval tertentu. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang terlebih dahulu menentukan turunan dari  $f'(x)$ , kemudian menentukan nilai-nilai  $x$  yang memenuhi sehingga  $f'(x) = 0$ . Dari jawaban tersebut, subjek melakukan kesalahan dalam penentuan nilai  $x$  tersebut. Setelah itu, subjek memilih titik-titik uji yang akan disubstitusi ke fungsi untuk menentukan titik maksimum dan minimum fungsi tersebut. Titik-titik uji tersebut adalah solusi  $f'(x) = 0$ , titik ujung, dan menambahkan satu titik lagi. Penambahan titik terakhir ini merupakan langkah yang keliru sehingga dapat disimpulkan bahwa subjek S1b belum memilih dan menggunakan prosedur-prosedur yang tepat terkait penentuan titik maksimum dan minimum fungsi tersebut. Selain itu, dalam menentukan turunan dari  $f(x)$ , subjek S1b juga memilih dan menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat.

Persamaan garis singgung

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 3x^2 - 3(x + 2)$$

$$y - 3 = 3x^2 + 6x^2 - 3x - 6$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x^2 - 3x - y - 3 = 0$$

**Gambar 4.27 Jawaban Subjek S1b-T402**

Pada jawaban subjek S1b di atas, terlihat bahwa subjek S1b tidak mengaplikasikan turunan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S1b mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut

*P1b401*      *Coba perhatikan kembali cara menentukan  $x$  dari turunannya dek?*

*S1b401*      *Mm... (sambil melihat kembali jawabannya) oh iye kak, salahka, harusnya kukalikan 3 dengan 1. Jadi,  $3x + 3$  kak. Jadi, nilai  $x$  nya itu  $-1$ .*

*P1b402*      *Kalau begitu, bagaimana caranya adek tentukan nilai maksimum dan minimumnya ini?*

*S1b402*      *Titiknya disubstitusi masuk ke persamaan awal, yaitu titik  $(-2,3)$  trus sama yang  $-1$  dan  $1$ .*

*P1b403*      *Setelah itu?*

*S1b403*      *Dari hasilnya itumi nilai maksimum dan minimum kak.*

- Subjek S1b tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung, serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis

*P1b404*      *Bagaimana strategi adek dalam menyelesaikan soal no.4?*

*S1b404*      *Sebenarnya kak, waktu dijelaskan materi ini nda terlalu pahamka juga. Kenapa begini jawabanku kak, karena kemarin itu ada les ku baru ini kuingat materinya tentang persamaan kuadrat, itumi kenapaka jawab seperti ini kak karena kuperkiranki juga. Hehehe... (sambil tertawa)*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S1b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S1b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S1b juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang



Pada jawaban tes tertulis subjek S2a, terlihat bahwa subjek S2a mengaplikasikan konsep turunan dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi pada suatu interval tertentu. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek yang terlebih dahulu menentukan turunan dari  $f'(x)$ , kemudian menentukan nilai-nilai  $x$  yang memenuhi sehingga  $f'(x) = 0$  dengan tepat. Dalam menentukan turunan dari  $f(x)$ , subjek S2a juga memilih dan menggunakan aturan penjumlahan/pengurangan yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat. Pada langkah berikutnya, dapat dilihat bahwa subjek S2a tidak memilih dan menggunakan prosedur/aturan yang tepat dalam menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi tersebut. Hal ini dapat dilihat pada kesimpulan yang dituliskan subjek dengan menentukan nilai maksimumnya adalah 1 dan nilai minimumnya adalah  $-1$ . Selain itu, subjek juga memilih titik yang dilalui oleh persamaan garis yang ditanyakan pada soal adalah  $(-2,3)$ , padahal harusnya melalui titik maksimum fungsi tersebut sehingga subjek memperoleh hasil yang salah pada langkah berikutnya. Dari jawaban tersebut, dapat disimpulkan bahwa subjek S2a tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S2a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi. Akan tetapi, subjek S2a tidak memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut

- P2a401* Bagaimana prosedur yang Anda gunakan dalam menyelesaikan soal no.4?
- S2a401* Kan ini kak fungsinya  $x^3 - 3x - 4$  pada  $(x_1, y_1)$  trus yang ditanyakan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis singgung di titik maksimumnya. Jadi, yang pertama dicari nilai maksimum dan minimum. Cara yang saya pakai, diturunkan terlebih dahulu fungsinya, karena nilai maksimum dan minimum yang dicari, maka turunannya sama dengan 0. Sehingga didapat itu turunannya  $3x^2 - 3 = 0$ , trus dijabarkan sampai didapat hasilnya (sambil menunjuk jawabannya), nah nilai  $x$  nya itu 1 dan -1. Trus yang dicari itu persamaan garis yang tegak lurus, jadi gradiennya sama dengan -1.

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S2a juga memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur; serta subjek S2a mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi (S2a401). Akan tetapi, subjek S2a tidak memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut; subjek S2a juga tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung, serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis (Gambar 4.28). Dengan demikian, subjek S2a

memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses. Namun, pada taha skema pemahaman konsep siswa masih kurang dalam memahami konsep turunan.

**d. Jawaban Subjek Berkemampuan Sedang (S2b)**

Pada jawaban tes tertulis subjek S2b, subjek tidak menuliskan apapun pada lembar jawaban yang diberikan. Namun, untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- P2b401      Apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal no.4?*  
*S2b401      Diketahui kak nilai  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  pada  $(-2,3)$ , trus yang ditanyakan itu nilai maksimum dan minimumnya sama persamaan garis yang tegak lurus kak.*  
*P2a402      Kalau begitu, bagaimana langkah yang digunakan dalam menyelesaikan soal no.4?*  
*S2a402      Kan ini kak fungsinya  $x^3 - 3x - 4$  pada  $(x_1, y_1)$  trus diturunkan fungsinya jadi  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Setelah itu, nilai -2 dan 3 disubstitusi ke fungsi  $f(x)$  kak. Sampe situji ku pahami kak.*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S2b di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S2b menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar; subjek S2b memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S2b402); serta subjek S2b tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi (S2b402); subjek S2b juga tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan

gradien garis singgung, serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis. Dengan demikian, subjek S2b memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi dan proses. Namun, pada tahap skema pemahaman konsep siswa masih sangat kurang dalam memahami konsep turunan.

**e. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3a)**

Berikut ini adalah data hasil tes tertulis subjek berkemampuan rendah (S3a) dalam menyelesaikan soal pada nomor 4

1)  $f(x) = x^3 - 3x - 4 \rightarrow x^3 - x^2 - 3x - 4$   
 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$   
 Pada  $(-2, 3)$   
 $f'(2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 3$   
 $= 12 + 4 - 3$   
 $= 13$   
 $f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 3$   
 $= 3 + 2 - 3$   
 $= 2$   
 $f(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 3$   
 $= -3$   
 $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 3$   
 $= 3 - 2 - 3$   
 $= -2$   
 $f(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 3$   
 $= 12 + 4 - 3$   
 $= 13$   
 $f(3) = 3(3)^2 - 2(3) - 3$   
 $= 27 - 6 - 3$   
 $= 18$   
 • Nilai Maksimum = 18  
 Nilai Minimum = -3

**Gambar 4.29 Jawaban Subjek S3a-T4**

Pada jawaban tes tertulis subjek S3a, terlihat bahwa subjek S3a tidak mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi pada suatu interval tertentu. Hal ini dapat dilihat pada jawaban subjek dalam menentukan turunan fungsi  $f(x)$ , kemudian subjek memilih titik uji yang merupakan bilangan bulat  $-2$  sampai  $3$ . Setelah itu, subjek mensubstitusikan titik-titik uji tersebut ke  $f'(x)$  padahal harusnya ke  $f(x)$ . Jadi, dapat disimpulkan

bahwa subjek S3a tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi.

Untuk menelusuri lebih lanjut mengenai bagaimana pemahaman konsep matematika siswa pada materi turunan, maka dilakukan wawancara sebagai berikut

- Subjek S3a tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi.

*P3a401           Coba jelaskan cara Anda mengerjakan soal pada no.4!  
S3a401           Jadi, kan soalnya  $x^3 - 3x - 4$ . Kalau saya, karena pangkat itu nda bisa kalau dilangkahi dari 3 ke 1 berarti ada diselanya  $x^2$  yang tidak tertulis setelah itu baru diturunkan sehingga jawabannya  $3x^2 - 2x - 3$ , kemudian dari situ baru disubstitusi pada (-2,3). Disini sebenarnya kurang paham ka kak, tapi saya coba saja dari -2 sampai 3. Kemudian, disubstitusi ke hasil penurunan. Jadi, nilai maksimumnya 18 dan minimumnya -3 kak. Trus ada lagi soal yang tentukan persamaan garis tegak lurus nda paham mka kak. Jadi, sampai disiniji bisa kukerja kak*

Berdasarkan deskripsi pemahaman konsep subjek S3a di atas, maka dapat diinterpretasikan bahwa subjek S3a menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar (Gambar 4.29); subjek S3a tidak memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur (S3a401); subjek S3a juga tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta tidak memilih dan

menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut. Dengan demikian, subjek S3a memiliki pemahaman konsep pada tahap aksi. Namun, pada tahap proses dan skema pemahaman konsep siswa masih kurang dalam memahami konsep turunan.

#### f. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah (S3b)

Pada jawaban tes tertulis subjek S3b, subjek tidak menuliskan apapun pada lembar jawaban yang diberikan. Selain itu, pada saat wawancara subjek S3b juga tidak mengetahui dan memahami soal 4. Jadi, dapat disimpulkan bahwa subjek S3b tidak paham dengan konsep matematika pada materi turunan dalam menyelesaikan soal 4.

## 2. Klasifikasi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Siswa Berdasarkan Teori APOS

### a. Subjek Berkemampuan Matematika Tinggi

**Tabel 4.3 Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Tinggi**

Nomor Soal	Pemahaman Konsep							
	Aksi		Proses		Objek		Skema	
	S1a	S1b	S1a	S1b	S1a	S1b	S1a	S1b
1. a							1	1*
1. b	1	1						
2	1	1	1, 2	1, 2				
3	1	1	2	2	1, 2	1, 2		
4	1	1	2	2			2, 3*	2

*Keterangan : \*) Subjek tidak sepenuhnya memenuhi indikator pemahaman konsep*

Berdasarkan tabel di atas, dapat dilihat bahwa pada soal nomor 1.a subjek S1a memenuhi indikator 1 pada tahap skema sedangkan subjek S1b tidak

sepenuhnya memenuhi indikator 1 pada tahap skema. Sehingga dengan triangulasi sumber, data tersebut dikategorikan tidak valid. Pada soal nomor 1.b, subjek S1a dan S1b memenuhi indikator 1 pada tahap aksi sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi indikator 1 pada tahap aksi. Pada soal nomor 2, subjek S1a dan S1b memenuhi keseluruhan indikator baik pada tahap aksi dan proses sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi keseluruhan indikator baik pada tahap aksi maupun tahap proses. Pada soal nomor 3, subjek S1a dan S1b memenuhi keseluruhan indikator pada tahap aksi dan objek sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi keseluruhan indikator baik pada tahap aksi maupun tahap objek. Sedangkan pada tahap proses, kedua subjek berkemampuan tinggi memenuhi indikator 2 sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi indikator 2 pada tahap proses di soal nomor 3. Pada soal nomor 4, subjek S1a dan S1b memenuhi keseluruhan indikator pada tahap aksi sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi keseluruhan indikator pada tahap aksi. Pada tahap proses, subjek S1a dan subjek S1b memenuhi indikator 2 pada tahap proses sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi memenuhi indikator 2 pada tahap proses di soal nomor 4. Dapat dilihat juga bahwa subjek S1a memenuhi indikator 2 pada tahap skema dan tidak sepenuhnya memenuhi indikator 3 pada tahap yang sama. Sedangkan subjek S1b hanya memenuhi indikator 2 pada tahap skema di nomor 4. Sehingga dengan triangulasi sumber, disimpulkan bahwa subjek berkemampuan tinggi hanya memenuhi indikator 2 pada tahap skema di soal nomor 4.

Berdasarkan pemaparan di atas, diperoleh data berupa tabel berikut.

**Tabel 4.4 Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Tinggi**

Nomor Soal	Pemahaman Konsep			
	Aksi	Proses	Objek	Skema
1. a				
1. b	1			
2	1	1, 2		
3	1	2	1, 2	
4	1	2		2

b. Subjek Berkemampuan Matematika Sedang

**Tabel 4.5 Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Sedang**

Nomor Soal	Pemahaman Konsep							
	Aksi		Proses		Objek		Skema	
	S2a	S2b	S2a	S2b	S2a	S2b	S2a	S2b
1.a							1	1*
1.b	1	1						
2	1	1	2	2	1, 2	1, 2		
3	1	1	2	2	1, 2*	1, 2*		
4	1	1	2	2			2*	

*Keterangan : \*) Subjek tidak sepenuhnya memenuhi indikator pemahaman konsep*

Berdasarkan tabel di atas, dapat dilihat bahwa subjek S2a memenuhi indikator 1 pada tahap skema di soal nomor 1.a. Sedangkan subjek S2b tidak memenuhi sepenuhnya indikator 1 pada tahap skema di soal nomor 1.a. Sehingga dengan triangulasi sumber, maka data tersebut dianggap tidak valid. Pada soal nomor 1.b, subjek S2a dan S2b memenuhi indikator pada tahap aksi. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan sedang memenuhi indikator pada tahap aksi. Pada soal nomor 2, terlihat bahwa subjek S2a dan S2b memenuhi semua

indikator pada tahap aksi dan objek, sedangkan kedua subjek berkemampuan sedang tersebut memenuhi indikator 2 pada tahap proses. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan sedang memenuhi keseluruhan indikator pada tahap aksi dan objek di soal nomor 2 dan memenuhi indikator 2 pada tahap proses di soal nomor 2. Pada soal nomor 3, subjek S2a dan S2b memenuhi indikator pada tahap aksi. Selain itu, kedua subjek berkemampuan sedang juga memenuhi indikator 2 pada proses. Sedangkan pada tahap objek, kedua subjek berkemampuan sedang memenuhi indikator 1 dan tidak sepenuhnya memenuhi indikator 2. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan sedang memenuhi indikator pada tahap aksi, indikator 2 pada tahap proses, indikator 1 pada tahap objek dan tidak sepenuhnya memenuhi indikator 2 pada tahap objek. Pada soal nomor 4, kedua subjek berkemampuan sedang memenuhi indikator 1 pada tahap aksi dan indikator 2 pada tahap proses. Akan tetapi, kedua subjek berkemampuan sedang tidak sepenuhnya memenuhi indikator 2 pada tahap skema. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan sedang memenuhi indikator pada tahap aksi dan indikator 2 pada tahap proses dan tidak sepenuhnya memenuhi indikator 2 pada tahap skema.

Berdasarkan pemaparan di atas, diperoleh data berupa tabel berikut.

**Tabel 4.6 Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Sedang**

Nomor Soal	Pemahaman Konsep			
	Aksi	Proses	Objek	Skema
1. a				
1. b	1			
2	1	2	1, 2	
3	1	2	1, 2*	
4	1	2		

## c. Subjek Berkemampuan Matematika Rendah

**Tabel 4.7 Pemahaman Konsep Turunan Subjek Berkemampuan Rendah**

Nomor Soal	Pemahaman Konsep							
	Aksi		Proses		Objek		Skema	
	S3a	S3b	S3a	S3b	S3a	S3b	S3a	S3b
<b>1.a</b>								1
<b>1.b</b>	1	1						
<b>2</b>	1	1	1, 2	1, 2				
<b>3</b>	1	1	2	2				
<b>4</b>	1							

Berdasarkan tabel di atas, maka dapat dilihat bahwa subjek S3a tidak memiliki pemahaman pada tahap skema di soal nomor 1.a. Sedangkan subjek S3b memenuhi indikator 1 pada tahap skema di soal nomor 1.a. Sehingga dengan triangulasi sumber, maka data tersebut dianggap tidak valid. Pada soal nomor 1.b, baik S3a maupun S3b memenuhi indikator pada tahap aksi. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan rendah memiliki pemahaman pada tahap aksi. Pada soal nomor 2, subjek S3a dan S3b memenuhi indikator pada tahap aksi. Selain itu, S3a dan S3b juga memenuhi kedua indikator pada tahap proses. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan rendah memenuhi indikator pada tahap aksi dan kedua indikator pada tahap proses di soal nomor 2. Pada soal nomor 3, baik subjek S3a maupun subjek S3b memenuhi indikator pada tahap aksi dan indikator 2 pada tahap proses. Sehingga disimpulkan bahwa subjek berkemampuan rendah memenuhi indikator pada tahap aksi dan indikator 2 pada tahap proses. Pada soal nomor 4, subjek S3a memenuhi indikator pada tahap aksi sedangkan subjek

S3b tidak memenuhi indikator pada tahap aksi. Sehingga dengan triangulasi sumber, maka data tersebut dianggap tidak valid.

Berdasarkan pemaparan di atas, diperoleh data berupa tabel berikut.

**Tabel 4.8 Hasil Triangulasi Subjek Berkemampuan Rendah**

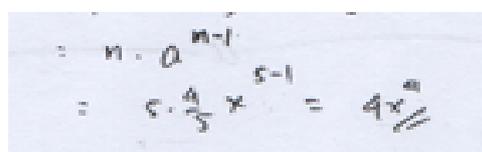
Nomor Soal	Pemahaman Konsep			
	Aksi	Proses	Objek	Skema
1. a				
1. b	1			
2	1	1, 2		
3	1	2		
4				

### C. Pembahasan

Data penelitian dianalisis untuk memperoleh deskripsi kemampuan pemahaman konsep matematika tentang turunan fungsi aljabar berdasarkan teori APOS pada siswa kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar. Sebagaimana dijelaskan pada kajian teori bahwa teori APOS adalah suatu teori belajar yang menguraikan tentang bagaimana kegiatan mental seorang anak yang berbentuk aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*) ketika mengkonstruksi konsep matematika (Dubinsky dan McDonald, 201). Teori APOS ini digunakan untuk mengetahui atau menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep. Berikut penjelasan dan analisis berkaitan dengan tahapan-tahapan teori APOS, yaitu aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*).

## 1. Tahap Aksi

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, secara keseluruhan subjek berada pada tahap aksi. Ini ditandai dengan semua subjek telah memenuhi indikator pada tahap aksi, yaitu subjek menyatakan ulang konsep aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar.



$$= n \cdot x^{n-1}$$

$$= 5 \cdot \frac{4}{3} x^{5-1} = 4x^4$$

**Gambar 4.30 Jawaban Subjek Tahap Aksi**

Pada gambar 4.30, subjek melakukan aktivitas prosedural yang ditandai pada cara subjek dalam menuliskan jawaban sesuai dengan prosedur aturan pangkat. Selain itu, hal ini juga dapat dilihat dari jawaban subjek, subjek sepenuhnya menerapkan aturan pangkat dalam menentukan turunan baik pada soal nomor 1.b, 2 dan 3 sesuai dengan indikator pemahaman pada tahap ini, hanya pada soal nomor 4 yang terdapat sedikit perbedaan. Oleh karena itu, pemahaman subjek pada tahap aksi dikategorikan tinggi. Hal ini dikarenakan materi pada tahap aksi termasuk materi yang lebih sederhana dibandingkan dengan materi-materi lainnya. Perlu dicatat juga bahwa materi pada tahap ini merupakan materi penunjang bagi tahap-tahap berikutnya, ini sejalan dengan Hudojo (1990) yang menyatakan bahwa dalam mempelajari konsep B yang mendasarkan kepada konsep A, seseorang perlu memahami lebih dulu konsep A. Tanpa memahami konsep A, tidak mungkin orang itu memahami konsep B. Oleh karena itu, memang dibutuhkan pemahaman yang tinggi pada tahap aksi.

Secara sederhana indikator pemahaman konsep turunan siswa pada tahap aksi disajikan pada tabel 4.9

**Tabel 4.9 Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Aksi**

Tahap	Indikator	Subjek
Aksi	Subjek menyatakan ulang aturan pangkat dengan menerapkan aturan tersebut dalam menentukan turunan fungsi aljabar	S1a, S1b, S2a, S2b, S3a, S3b

## 2. Tahap Proses

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, semua subjek telah memiliki pemahaman konsep pada tahap proses. Subjek berkemampuan rendah dan tinggi telah memenuhi kedua indikator pemahaman konsep pada tahap proses.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= (1-x)(1-x^2) \\
 &= 1-x^2-x+x^3 \\
 &= x^3-x^2-x+1 \\
 g'(x) &= 3x^2-2x-1
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.31 Jawaban Subjek Tahap Proses**

Ini dapat ditandai pada gambar 4.31, subjek mengubah bentuk fungsi dari bentuk perkalian beberapa fungsi ke bentuk penjumlahan beberapa fungsi tertentu sesuai dengan indikator (1), serta subjek juga menerapkan aturan penjumlahan/pengurangan sesuai dengan indikator (2), baik pada soal nomor 2, 3 maupun soal nomor 4 (untuk subjek berkemampuan tinggi). Hal ini berarti subjek melakukan aksi secara berulang sehingga subjek dapat melakukannya dalam imajinasinya.

Sedangkan, hanya subjek berkemampuan sedang yang memenuhi satu indikator dalam tahap proses. Indikator yang tidak terpenuhi adalah indikator pertama. Ini dapat dilihat pada jawaban kedua subjek untuk soal nomor 2, kedua

subjek berkemampuan sedang lebih memilih untuk membawanya ke aturan perkalian ketimbang dengan mengekspansinya ke dalam bentuk penjumlahan beberapa suku sehingga dapat digunakan aturan penjumlahan/pengurangan yang sebenarnya lebih sederhana. Berdasarkan hasil wawancara, subjek lebih memilih cara tersebut karena cara tersebut yang langsung terpikirkan. Dari keseluruhan hasil yang diperoleh, pemahaman subjek pada tahap proses dapat dikategorikan tinggi. Ini dikarenakan materi pada tahap proses ini ditunjang oleh materi pada tahap aksi, sebagaimana yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa pemahaman subjek pada tahap aksi termasuk tinggi, ini sejalan dengan Hiebert dan Carpenter (Sholihah dan Mubarak, 2016) bahwa pemahaman memberikan generatif artinya bila seseorang telah memahami suatu konsep, maka pengetahuan itu akan mengakibatkan pemahaman yang lain karena adanya jalinan antar pengetahuan yang dimiliki siswa sehingga setiap pengetahuan baru melalui keterkaitan dengan pengetahuan yang sudah ada sebelumnya. Seseorang yang paham dengan materi prasyarat untuk suatu konsep, akan memudahkannya dalam memahami konsep tersebut. Dalam matematika, untuk dapat menguasai suatu materi seseorang harus telah menguasai materi sebelumnya atau yang biasa disebut materi prasyaratnya (Theresia, 1992).

Secara sederhana indikator pemahaman konsep turunan siswa pada tahap proses disajikan pada tabel 4.10

**Tabel 4.10 Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Proses**

<b>Tahap</b>	<b>Indikator</b>	<b>Subjek</b>
	Subjek menyajikan fungsi aljabar ke dalam bentuk tertentu sehingga aturan penjumlahan/pengurangan dapat digunakan, dalam hal ini ke dalam bentuk penjumlahan/pengurangan beberapa suku	S1a, S1b, S3a, S3b
Proses	Subjek memilih, memanfaatkan, dan menggunakan prosedur aturan penjumlahan/pengurangan dalam menentukan turunan fungsi aljabar yang dikombinasikan dengan penggunaan aturan pangkat secara berulang pada masing-masing suku dengan tepat sesuai dengan prosedur	S1a, S1b, S2a, S2b, S3a, S3b

### 3. Tahap Objek

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, terdapat hasil yang bervariasi dari ketiga kelompok subjek. Subjek berkemampuan tinggi telah memenuhi kedua indikator pemahaman konsep pada tahap objek. Ini dapat dilihat pada jawaban subjek di nomor 3. Pada jawaban tersebut, subjek mengidentifikasi bentuk fungsi sebagai hasil bagi dari dua buah fungsi tertentu sesuai dengan indikator (1) meskipun sebelumnya kedua subjek terlebih dahulu mengubah bentuk fungsinya. Selanjutnya, subjek juga memilih prosedur yang tepat untuk digunakan dalam menentukan turunan fungsi tersebut, yaitu dengan memilih aturan pembagian serta menggunakannya dengan tepat sesuai dengan indikator (2). Artinya, pada tahap ini subjek mengkonseptualisasikan suatu fungsi sesuai dengan sifat-sifat dari fungsi tersebut. Seseorang dikatakan telah memiliki objek dari suatu konsep matematika apabila seseorang telah mampu memperlakukan ide atau

konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan untuk melakukan aksi atas objek tersebut, serta memberikan alasan dan penjelasan tentang sifat-sifatnya (Maharaj, 2013).

Pada kelompok subjek berkemampuan sedang, diperoleh hasil yang hampir sama di antara kedua subjek. Subjek pertama telah memenuhi indikator (1), ini dapat dilihat dari hasil wawancara untuk soal nomor 3 bahwa subjek hendak menggunakan aturan rantai yang berarti bahwa subjek memahami fungsi tersebut sebagai komposisi dari dua buah fungsi. Dari sini, diketahui juga bahwa subjek memilih prosedur, akan tetapi subjek tidak menggunakan prosedur tersebut sesuai dengan indikator (2). Sama halnya dengan subjek pertama, subjek kedua telah memenuhi kedua indikator pemahaman konsep di tahap objek.

The image shows handwritten mathematical work on a light blue background. It consists of three lines of equations:

$$g(x) = \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^2$$

$$g'(x) = 2 \left( \frac{x(1+x)}{1-x} \right)^{2-1} \left( \frac{[2+2x][1-x] - [x(1+x)][-1]}{(1-x)^2} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1+2x-x-2x^2}{(1-x)^2} \right)$$

**Gambar 4.32 Jawaban Subjek Tahap Skema**

Ini dapat dilihat pada jawaban subjek pada gambar 4.32 untuk soal nomor 3, subjek menggunakan aturan rantai yang berarti bahwa subjek memahami fungsi tersebut sebagai komposisi dari dua buah fungsi sehingga subjek telah mengidentifikasi bentuk fungsi sesuai dengan indikator (1). Kemudian subjek juga memilih aturan yang tepat berdasarkan hasil klasifikasi bentuk fungsi, yaitu aturan rantai akan tetapi subjek tidak menggunakan aturan tersebut dengan tepat sesuai dengan indikator (2). Akan tetapi, pada soal nomor 2 kedua subjek berkemampuan sedang telah memenuhi indikator (1) maupun indikator (2) pada tahap objek. Selain

itu, subjek juga dapat menemukan hal lain yang diperoleh dari aksi dan proses, yaitu subjek mengidentifikasi bentuk fungsi sebagai komposisi dari dua buah fungsi.

Beda halnya pada subjek berkemampuan rendah, subjek tidak memenuhi kedua indikator pemahaman konsep pada tahap objek. Ini ditandai dengan hasil wawancara untuk soal nomor 3 yang menyebutkan bahwa pada dasarnya subjek pertama mengalami kebingungan dengan jawabannya sendiri. Sedangkan berdasarkan jawaban dan hasil wawancara untuk soal nomor 3 subjek kedua salah dalam mengklasifikasikan bentuk fungsi, di soal nomor 3 ini subjek mengklasifikasikan bahwa fungsi tersebut berbentuk pembagian dari dua buah fungsi (tanpa melakukan manipulasi aljabar untuk menghilangkan pangkatnya), harusnya sebagai komposisi dari dua buah fungsi.

Berdasarkan keseluruhan hasil yang diperoleh untuk tahap ini, pemahaman subjek pada tahap objek masih kurang. Pada tahap ini, pemahaman subjek terlihat kurang pada aturan rantai, baik identifikasi bentuk fungsi maupun prosedur dalam menentukan turunan fungsi aljabar, ini sejalan dengan temuan dari Maharaj (2013) bahwa aturan rantai adalah materi yang sulit untuk disampaikan kepada siswa yang berakibat pada tingkat pemahaman siswa yang kurang.

Secara sederhana indikator pemahaman konsep turunan siswa pada tahap objek disajikan pada tabel 4.11

**Tabel 4.11 Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Objek**

Tahap	Indikator	Subjek
Objek	Subjek mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat	S1a, S1b, S2a, S2b
	Subjek tidak mengidentifikasi serta mengklasifikasikan bentuk suatu fungsi aljabar baik komposisi, hasil kali maupun hasil bagi dari dua buah fungsi menurut sifat-sifat tertentu dengan tepat	S3a, S3b
	Subjek memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi)	S1a, S1b
	Subjek memilih aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi). Akan tetapi, subjek tidak menggunakan prosedur tertentu dengan tepat	S2a, S2b
	Subjek tidak memilih, memanfaatkan, dan menggunakan aturan/prosedur tertentu dengan tepat sesuai dengan hasil klasifikasi bentuk fungsi (komposisi, hasil kali, dan hasil bagi)	S3a, S3b

#### 4. Tahap Skema

Berdasarkan hasil yang diperoleh sebelumnya, diperoleh bahwa subjek pertama yang berkemampuan tinggi telah memenuhi indikator (1) dan indikator (2). Namun, subjek masih belum sepenuhnya memenuhi indikator (3). Pada indikator (3), subjek mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung meskipun dengan prosedur yang kurang tepat. Selain itu subjek mengaitkan konsep turunan dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis.

Handwritten mathematical solution for finding the maximum and minimum of a function. The work is as follows:

$$4. f(x) = x^3 - 3x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

cek

$$u/x = 1 \Rightarrow 1^3 - 3(1) - 4$$

$$= 1 - 3 - 4 = -6 \rightarrow \text{Min}$$

$$u/x = -1 = -1^3 - 3(-1) - 4$$

$$= -1 + 3 - 4$$

$$= -5 + 3 = -2$$

$$u/x = -2 = (-2)^3 - 3(-2) - 4$$

$$= -8 + 6 - 4$$

$$= -12 - 4 = -16 \rightarrow \text{Min}$$

$$u/x = 3 = 3^3 - 3(3) - 4$$

$$= 27 - 9 - 4$$

$$= 14 \rightarrow \text{Maks}$$

**Gambar 4.33 Jawaban Subjek Tahap Skema**

Pada gambar 4.33, subjek telah menghubungkan antara aksi, proses, serta mengaitkan konsep turunan dengan konsep matematika lainnya yaitu dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi. Sedangkan subjek kedua dengan kemampuan matematika tinggi hanya memenuhi indikator (2). Pada indikator pertama, subjek hanya mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Akan tetapi, subjek tidak menggunakan aturan-aturan pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur. Subjek juga belum memenuhi indikator (3), yaitu subjek belum mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung, serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis.

Pada subjek berkemampuan sedang, hanya subjek pertama yang telah memenuhi indikator (1), yaitu mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih

dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur. Sedangkan subjek kedua belum sepenuhnya memenuhi indikator (1) karena subjek tidak menggunakan aturan-aturan tertentu dengan tepat sesuai dengan prosedur pada penentuan  $f(x + h)$ . Sementara itu, subjek pertama belum memenuhi indikator (2) sepenuhnya. Subjek pertama mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi. Akan tetapi, subjek pertama tidak memilih dan menggunakan aturan/prosedur dengan tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut. Dari hasil wawancara, subjek kedua tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi. Dari hasil penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, diperoleh juga bahwa kedua subjek tidak memenuhi indikator (3), yaitu subjek tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung, serta mengaitkannya dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis. Ini disebabkan karena pemahaman siswa tentang materi prasyarat berupa kedudukan antara dua garis masih rendah.

Di antara kedua subjek berkemampuan rendah, hanya subjek kedua yang memenuhi indikator (1). Sedangkan subjek pertama tidak memenuhi indikator (1) karena subjek kedua tidak mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Berdasarkan jawaban dan hasil wawancara subjek untuk soal nomor 4, baik indikator (2) maupun indikator (3) tidak ada yang terpenuhi. Ini disebabkan karena materi prasyarat

berupa konsep garis lurus masih rendah yang berakibat kurangnya pemahaman subjek di tahap skema, di mana pada tahap ini diharapkan individu dapat menggabungkan antara aksi, proses, objek, dan skema lain yang saling berhubungan (Maharaj, 2010). Hal ini juga sejalan dengan Hudojo (1990) yang menyatakan bahwa dalam mempelajari konsep B yang mendasarkan kepada konsep A, seseorang perlu memahami lebih dulu konsep A. Tanpa memahami konsep A, tidak mungkin orang itu memahami konsep B.

Secara keseluruhan, hampir semua subjek telah memenuhi indikator 1. Ini sejalan dengan temuan oleh Kaplan, Ozturk & Ocal (2015) bahwa sebagian besar siswa telah mampu memahami definisi turunan dan menyelesaikan soal yang berkaitan dengan definisi turunan. Pemahaman subjek pada tahap skema masih kurang dan jika dibandingkan dengan tahap-tahap lainnya maka tahap skema merupakan tahap dengan pemahaman konsep paling kurang. Namun, ini memang merupakan hal yang tidak mudah. Pemahaman subjek terlihat paling kurang pada tahap skema tentang aplikasi turunan, ini sejalan dengan temuan Maharaj (2013) bahwa perlu adanya penekanan yang lebih besar selama pembelajaran materi turunan pada bagian representasi grafik dari turunan dan kaitan antara turunan dengan daerah (interval) ketika fungsi naik maupun fungsi turun termasuk maksimum dan minimum fungsi, yang menandakan bahwa materi aplikasi turunan merupakan materi yang sulit untuk dipahami sehingga menyebabkan pemahaman siswa kurang.

Secara sederhana indikator pemahaman konsep turunan siswa pada tahap skema disajikan pada tabel 4.12

**Tabel 4.12 Indikator Pemahaman Konsep Turunan pada Tahap Skema**

<b>Tahap</b>	<b>Indikator</b>	<b>Subjek</b>
Skema	Subjek mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur	S1a, S2a, S3b
	Subjek mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar, serta memilih aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur. Akan tetapi, subjek tidak menggunakan aturan-aturan tertentu dengan tepat sesuai dengan prosedur	S2b
	Subjek mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar. Akan tetapi, subjek tidak memilih dan menggunakan aturan-aturan tertentu pada konsep limit fungsi dengan tepat sesuai dengan prosedur	S1b
	Subjek tidak mengaitkan antara konsep definisi turunan dengan konsep limit fungsi aljabar dalam menentukan turunan fungsi aljabar	S3a
	Subjek mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi, serta memilih dan menggunakan aturan/prosedur yang tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut	S1a, S1b
	Subjek mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi. Akan tetapi, subjek tidak memilih dan menggunakan aturan/prosedur yang tepat terkait pengaplikasian konsep turunan tersebut	S2a
	Subjek tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi	S2b, S3a, S3b

---

Subjek mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung tetapi dengan prosedur yang tidak tepat serta mengaitkan konsep turunan dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis	S1a
Subjek tidak mengaplikasikan konsep turunan dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan gradien garis singgung serta tidak mengaitkan konsep turunan dengan konsep-konsep matematika lainnya termasuk kedudukan antara dua garis	S1b, S2a, S2b, S3a, S3b

---

## **BAB V**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **A. Kesimpulan**

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan tentang “Deskripsi Kemampuan Pemahaman Konsep Turunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas XII MIA-1 SMAN 2 Makassar”, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Siswa berkemampuan tinggi memiliki kemampuan pemahaman konsep turunan pada tahap aksi, proses, objek, dan skema. Pada tahap aksi, siswa memenuhi indikator pemahaman konsep, serta memenuhi semua indikator pemahaman konsep pada tahap proses dan objek. Namun, pada tahap skema, siswa hanya memenuhi 1 indikator pemahaman konsep, yaitu indikator 2.
2. Siswa berkemampuan sedang memiliki kemampuan pemahaman konsep turunan pada tahap aksi, proses, dan objek. Pada tahap aksi, siswa memenuhi indikator pemahaman konsep dan memenuhi 1 indikator pemahaman konsep pada tahap proses, yaitu indikator 2. Pada tahap objek, siswa memenuhi semua indikator pemahaman konsep. Namun, pada tahap skema, siswa tidak memenuhi indikator pemahaman konsep.
3. Siswa berkemampuan rendah memiliki kemampuan pemahaman konsep turunan pada tahap aksi dan proses. Pada tahap aksi, siswa memenuhi indikator pemahaman konsep, serta memenuhi semua indikator pemahaman konsep pada tahap proses. Namun, siswa tidak memenuhi indikator pemahaman konsep pada tahap objek dan skema.

## **B. Saran**

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, saran yang dapat direkomendasikan adalah sebagai berikut:

1. Guru sebaiknya lebih memperhatikan bagaimana siswa memahami konsep materi yang diajarkan dan membiasakan siswa mengerjakan soal-soal matematika terkait dengan aplikasi dari konsep yang diajarkan sebagai upaya peningkatan kemampuan siswa dalam menyelesaikan berbagai permasalahan matematika.
2. Siswa hendaknya membiasakan diri mengerjakan soal-soal matematika terkait dengan pengaplikasian konsep matematika agar materi yang diajarkan terutama konsep dari materi tersebut dapat dipahami dengan baik.
3. Penelitian ini sangat direkomendasikan untuk dikembangkan lebih lanjut sebagai upaya dalam peningkatan mutu pendidikan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Asiala, *et al.* 1997. A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.
- Depdiknas. 2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nomor 22 Tahun 2006 tentang Standar Isi*. Jakarta: Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah.
- Djohan, Warsoma. & Wono Setya Budhi. 2007. *Diktat Kalukulus I*. Bandung: Departemen Matematika FMIPA ITB.
- Dubinsky, E. & Michael A. McDonald. 2001. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Tersedia: <http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf>, Diakses tanggal 22 Januari 2018.
- Firouzian, S.S. 2013. Students' Way of Thinking about Derivative and Its Correlation to their Ways of Solving Applied Problems. In K.S., H.R.G., & M.K. & Oehrtman (Eds.). *Proceedings of the 16th Annual conference on research in undergraduate mathematics Education*, pp.492-497, Brown. Tersedia: <http://sigmaa.maa.org/rume/RUME16Volume2.pdf>, Diakses tanggal 26 Oktober 2018.
- Hiebert, J. & Carpenter, P. 1992. *Learning and Teaching with Understanding. Dalam Douglas A Grows (Ed.)*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing Company.
- Hudojo, H. 1990. *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Malang: Penerbit IKIP Malang.
- . 1993. *Mengajar Belajar Matematika*. Surabaya: Usaha Nasional.
- Kemendiknas. 2014. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 59 Tahun 2014 Tentang Kurikulum Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Kemendiknas.
- Kesumawati, Nila. 2008. Pemahaman Konsep Matematika dalam Pembelajaran Matematika. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. FKIP Program Studi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Palembang.

- Lestari, Karunia Eka dan Mokhammad Ridwan Yudhanegara. 2015. *Penelitian Pendidikan Matematika*. Bandung: PT Refika Aditama.
- Ma'sum, Ali. 2013. Profil Kemampuan Penalaran Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal Bangun Ruang Sisi Lengkung. (Online). Tersedia: <http://ejurnal.stkipjb.ac.id/index.php/AS/article/viewFile/197/133>, Diakses tanggal 5 April 2018.
- Maharaj, A. 2010. An APOS Analysis of Syudents' Understanding of the Concept of Limit of a Function. *Phytagoras*, 71, 41-52.
- , 2013. An APOS Analysis of Natural Science Students' Understanding of Derivatives. *South African Journal of Education*, 33(1), 1-16.
- Miles, Matthew. B., A. Michael Huberman & Johnny Saldana. 2014. *Qualitative Data Analysis, A Methods Sourcebook Third Editions*. Sage Publications: Inc.
- Moleong, L. J. 2014. *Metodologi Penelitian Kualitatif (Edisi Revisi)*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Ningsih, Yunika Lestari. 2016. Kemampuan Pemahaman Konsep Matematika Mahasiswa Melalui Penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) Berbasis Teori APOS Pada Materi Turunan. *Jurnal: Edumatica Vol. 6 No. 1, April 2016*. Tersedia: <http://online-journal.unja.ac.id/index.php/edumatica/article/view/2994>, Diakses tanggal 14 Februari 2018.
- Park, Jungeun. 2012. Students' Understanding of the Derivative: Literature Review of English and Korean Publications. *Journal of the Korean School Mathematics Society. Volume 15(2)*, 331-348.
- Purcell, Edwin J, dkk. 2004. *Kalkulus Edisi 8 Varberg, Purcell, Ringdon*. Diterjemahkan oleh: I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Sanjaya, Wina. 2009. *Strategi Pembelajaran Berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.
- Shatila, H., Samer Habre & Iman Osta. 2016. Effect of Technology-Aided Multiple-Representations Approach On Student Understanding of Derivatives. *28th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Atlanta, Georgia, USA.

- Sholihah, Ummu dan Dziki Ali Mubarak. 2016. Analisis Pemahaman Integral Taktentu Berdasarkan Teori APOS (Action, Process, Object, Schema) Pada Mahasiswa Tadris Matematika (TMT) IAIN Tulungagung. *Jurnal: Cendekia Vol. 14 No. 1, Januari-Juni 2016*. Tersedia: <http://jurnal.stainponorogo.ac.id/index.php/cendekia/article/view/620/456>, Diakses tanggal 07 Februari 2018.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Soedjadi. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia Konstansi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan Nasional.
- Stewart, James. 2008. *Calculus Early Transcendentals, Sixth Edition*. United States of America: Thomson Brooks/Cole.
- Sudijono, Anas. 2011. *Pengantar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: Rajawali Pers.
- Suherman, E., dkk. 2003. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Pendidikan Indonesia.
- Suryadi, Didi. 2005. Menciptakan Proses Belajar Aktif: Kajian dari Sudut Pandang Teori Belajar dan Teori Didaktik. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UPI.
- Suryadi, D. 2011. *Membangun Budaya Baru dalam Berpikir Matematika*. Bandung: Rizqi Press. (online). Tersedia: <http://www.scribd.com/doc/93456342/Membangun-Budaya-Baru-Dalam-BerpikirMatematika>. Diakses tanggal 21 Maret 2018.
- Theresia, M. H. 1992. *Pengantar Dasar Matematika: Logika dan Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.