Sifat-sifat Dasar Integral Riemann di

Muhammad Abdy1, a), Ilham Minggi1, b), dan Khaerani Nurdin1, c)*1Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar; 90224*

a) abdy02@yahoo.comb) ilhamminggi@gmail.comc) nurdinkhaerani@gmail.com

**Abstrak.** Penelitian ini adalah penelitian kajian pustaka yang bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat dasar integral Riemann di . Dalam mempelajari sifat-sifat dasar integral Riemann di , digunakan metode studi literatur. Kajian dimulai dari definisi partisi di , definisi jumlahan Riemann di , dan definisi integral Riemann di . Selanjutnya, dikaji pula beberapa sifat dasar integral Riemann yang berlaku di seperti: sifat ketunggalan, Kriteria Cauchy, eksistensi integral Riemann, sifat kelinearan, dan sifat keterbatasan yang akan dikembangkan di . Sebagai hasil penelitian, berhasil dikembangkan definisi integral Riemann dan sifat ketunggalan di . Selain itu, berhasil pula dikembangkan Kriteria Cauchy, eksistensi integral Riemann, sifat kelinearan, dan sifat keterbatasan di . Untuk penelitian selanjutnya, integral Riemann dapat dikembangkan ke atau ke dengan berbagai sudut tinjauan.

**Kata Kunci:** integral Riemann, sifat-sifat dasar, .

**Abstract.** This research is a literature study which aims to examine the basic properties of Riemann integrals in . In studying the basic properties of the Riemann integral in , the literature study method is used. The study starts from the definition of partition in , definition of Riemann sum in , and the Riemann integral definition in . Furthermore, we also examine some of the basic characteristics of the Riemann integral that apply in such as: the nature of singularity, the Cauchy Criteria, the existence of Riemann integrals, the nature of linearity, and the nature of limitations to be developed in . As a result of research, definitions of Riemann integral and characteristics of unity in have been developed. Besides that, it was also successfully developed Cauchy Criteria, the existence of Riemann integrals, linearity properties, and the nature of limitations in . For further research, Riemann integrals can be developed to or to with various viewpoints.

**Keywords:** Riemann integral, the basic properties, .

# PENDAHULUAN

Teori integral yang dipelajari untuk jenjang Strata 1 (S1) sekarang ini ada dua macam yaitu integral anti turunan dan integral Riemann. Keduanya memiliki pengembangan tersendiri dalam hal menyelesaikan integral, sehingga integral anti turunan terlihat lebih mudah digunakan. Namun demikian, integral Riemann lebih banyak aplikasinya dalam rekayasa. Terdapat fungsi yang sekaligus terintegral Riemann dan terintegral anti turunan. Kedua integral tersebut berangkat dari perkembangan limit dan turunan.

Pengertian limit dan turunan di suatu titik pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan matematika, salah satunya adalah I.Newton (1642-1727). Newton memanipulasi pengertian turunan suatu fungsi beserta sifat-sifatnya dan menyusun pola teori integral pertama kali yang disebut teori integral Newton. Fungsi dikatakan terintegral Newton pada jika ada fungsi sehingga kontinu pada dan untuk setiap .

Nilai disebut integral Newton fungsi pada . Integral Newton dapat diterapkan pada perhitungan luas daerah di bawah kurva yang dibatasi oleh sumbu- atau sumbu- (Purcell, dkk., 2010). Selanjutnya A. Cauchy (1789-1857) mendefinisikan integral sebagai berikut.

Diberikan fungsi dan . Partisi pada , ditulis , didefinisikan sebagai

 dengan , maka bilangan disebut integral Cauchy fungsi pada jika

dengan kata lain, untuk setiap bilangan , ada bilangan sehingga untuk setiap partisi pada dengan berlaku

(D.C. Gillespie, dalam Achmad, 2005).

Kemudian pada tahun 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan. Metode integral ini disebut integral Riemann (Sinay, 2012). Riemann memperbaiki integral Cauchy dengan mengambil sebagai sebarang titik di dalam selang bagian . Dengan sedikit perbaikan ini ternyata hasilnya sangat menakjubkan, fungsi terbatas dan diskontinu di beberapa titik terintegralkan secara Riemann. Fungsi yang terintegralkan merupakan fungsi yang terbatas. Tetapi, tidak semua fungsi yang terbatas terintegral Riemann (Achmad, 2005).

Riemann mendefinisikan integral sebagai berikut. (Sinay, 2012)

Suatu fungsi dikatakan terintegral Riemann jika ada bilangan sehingga untuk setiap terdapat sehingga jika

partisi Riemann pada dengan berlaku

Selanjutnya bilangan disebut nilai integral Riemann fungsi pada dan dinotasikan dengan

Integral Riemann pada dasarnya hanya membahas fungsi-fungsi dari ke . Dengan demikian banyak hal yang dapat menjadi aspek pengembangan dari integral Riemann, diantaranya adalah fungsi-fungsi dari ke , dari ke , dari ke , dari ke , dan seterusnya. Pada tulisan ini membahas integral Riemann dengan fungsi dari ke .

# KAJIAN PUSTAKA

## Penelitian Relevan

Achmad (2005) dalam tulisannya yang membahas karakteristik fungsi-fungsi yang terintegral Riemann. Fungsi yang dibahas dalam tulisan Achmad adalah fungsi dari ke . Selanjutnya, Andiwijaya (2012) yang membahas ketunggalan nilai integral Henstock dan sifat linear pada integral Henstock. Tulisan Andiwijaya merupakan pengembangan dari integral Riemann dengan mengubah bilangan positif menjadi fungsi positif . Fungsi-fungsi yang dibahas pada tulisan Andiwijaya adalah fungsi yang domainnya . Selanjutnya, Ilwaru, dkk. (2012) dalam tulisannya yang membahas beberapa teorema kekonvergenan pada integral Riemann. Fungsi yang dibahas masih fungsi dengan domain .

## Teorema 1

Jika , sehingga untuk setiap maka , (Bartle, 2011).

Bukti:

Dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan , berarti (diketahui ). Pilih , , diperoleh

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa , .

Jadi, .

# METODe PENELITIAN

Penelitian ini digolongkan dalam jenis kajian pustaka dengan menggunakan literatur beberapa buku, jurnal, skripsi, tesis, dan disertasi. Penelitian dilakukan pada bulan Juni - November 2018 dengan melakukan studi literatur terhadap teori integral Riemann di , kemudian sejumlah informasi terkumpul dilakukan kajian kepustakaan. Selanjutnya, mendefinisikan yang dibutuhkan untuk membangun integral Riemann di , kemudian membuktikan sifat-sifat dasar integral Riemann di .

# Hasil PENELITIAN

## Ruang

Dalam tulisan ini, menyatakan bilangan real dan menyatakan himpunan bilangan real positif.

**Definisi 2**

Menurut Indrati (2002), bentuk ruang euclide sebagai berikut,

Selanjutnya untuk n=2,

merupakan ruang linear terhadap:

Operasi penjumlahan

Operasi perkalian dengan skalar

Selanjutnya, di didefinisikan norm sebagai berikut:

. (Pfeffer, 1993)

Jarak antara dua titik atau antara dua vektor dan di dalam disajikan dengan

Dua anggota dan di dalam dikatakan:

 jika untuk .

 jika untuk .

 jika untuk .

**Definisi 3**

Menurut Nurdin (2018), terdapat empat jenis selang dalam khususnya untuk dan didefinisikan sebagai berikut:

Jika himpunan

disebut selang tertutup sejati (non-degenerate closed interval) atau sel tertutup atau sel. Jika tidak demikian, disebut selang degenerate. Selanjutnya, titik dengan atau , disebut titik verteks sel , dan himpunan disebut rusuk sel . Selanjutnya, disebut selang terbuka di .

Jika didefinisikan . Jadi, jika maka nilainya sama dengan luas .

**Definisi 4**

Didefinisikan persekitaran- di (*-neighborhood)* sebagai berikut:

**Definisi 5**

Himpunan disebut himpunan buka jika untuk setiap terdapat sehingga dengan kata lain,

Lebih lanjut, himpunan disebut himpunan buka jika setiap titiknya merupakan titik interior.

**Definisi 6**

Himpunan disebut himpunan tutup jika himpunan buka.

## Partisi pada

**Definisi 7**

Menurut Indrati (2002), koleksi sel dikatakan tidak tumpang-tindih jika untuk . Selanjutnya, koleksi berhingga sel tidak saling tumpang-tindih dengan disebut partisi pada sel . Jika , dan sel dengan untuk , koleksi sel-titik

disebut partisi pada .

Selanjutnya, pada disebut titik terkait dan disebut selang dengan titik terkait .

**Definisi 8**

Diberikan . ; dan ,

dengan . (Indrati, 1992)

**Teorema 9** (*Penghalusan Partisi*)

Misalkan , , masing-masing merupakan bilangan riil positif pada dengan

Jika partisi- pada , maka juga merupakan partisi- dan partisi- pada . (Agustiani, 1996)

**Bukti:**

Misalkan partisi- pada yang diberikan oleh

dengan ,

Karena maka atau .

Akibatnya,

dan juga

untuk

Jadi merupakan partisi- dan partisi- pada dan terbukti pula bahwa partisi- lebih halus dari partisi- dan partisi-.

**Definisi 10** (*Jumlahan Riemann*)

Misalkan sebuah partisi membagi sel menjadi sel-bagian yang tidak saling tumpang-tindih. Kita sebut jumlah

sebagai jumlahan Riemann fungsi terhadap partisi .

## Integral Riemann

**Definisi 11** (*Integral Riemann di* )

Diberikan . Fungsi dikatakan terintegral Riemann pada jika terdapat bilangan sehingga untuk setiap terdapat bilangan sehingga jika partisi pada dengan berakibat

 disebut nilai integral Riemannfungsi pada dengan,

dapat pula ditulis,

**Teorema 12** (*Sifat* *Ketunggalan*)

Jika terintegral Riemann pada *,* maka nilai integralnya tunggal.

**Bukti:**

Misalkan dan nilai integral Riemann pada . Ini berarti,

untuk sebarang dapat diplih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

Pilih , akibatnya jika

. Jadi, (1) dan (2) dipenuhi.

Perhatikan bahwa:

Jadi berdasarkan Teorema 1 diperoleh,

**Teorema 13** (*Kriteria Cauchy*)

Diketahui , fungsi terbatas*.* Fungsiterintegral Riemann padajika dan hanya jika untuk setiap bilangan terdapat bilangansehingga jika danpartisi padadengan danberakibat.

**Bukti:**

**Syarat perlu:** Jika terintegral Riemann pada , maka ada bilangan sehingga untuk setiap bilangan terdapat bilangan sehingga jika partisi pada dengan berakibat

Diambil sebarang dua partisi dan partisi pada dengan dan berakibat

**Syarat cukup:** Menurut yang diketahui, untuk bilangan terdapat bilangan sehingga jika dan masing-masing partisi pada dengan dan berakibat

Akan ditunjukkan fungsi terintegral Riemann pada .

Akan ditunjukkan fungsi terbatas.

Tulis sebagai koleksi semua partisi pada dengan

Diambil , untuk setiap diperoleh

atau

jadi, himpunan bilangan real

terbatas. Akibatnya, terbatas.

Akan ditunjukkan fungsi terintegral Riemann pada .

Bagian 1) telah ditunjukkan fungsi terbatas dimana ada 2 kemungkinan, yaitu:

Jika anggota banyaknya berhingga, maka merupakan fungsi konstan dan oleh karena itu terintegral Riemann pada .

Jika anggota banyaknya tak berhingga, maka bukan fungsi konstan. Menurut teorema Bolzano-Weierstrass, mempunyai paling sedikit satu titik limit, namakan titik limit itu .

Hal ini berarti untuk setiap bilangan terdapat , sehingga dari (i) dan (ii) diperoleh

dengan kata lain, fungsi terintegral Riemann pada .

**Teorema 14** (*Eksistensi Integral Riemann*)

Misalkan dan kontinu pada , maka terintegral Riemann pada .

**Bukti:**

Karena kontinu pada dan tertutup dan terbatas, maka kontinu seragam pada (Bartle, 2011, h. 143). Dengan demikian, jika diberikan sebarang, terdapat sehingga jika dan , maka .

Pilih sehingga . Bentuk partisi pada dengan syarat untuk setiap dan

Menurut teori maksimum-minimum terdapat dan sehingga diperoleh,

 dan .

Akibatnya, jika dan merupakan partisi pada ,

maka

Menurut Kriteria Cauchy (Teorema 13), terintegral Riemann pada .

**Teorema 15** (*Sifat Kelinearan Integral Riemann*)

Misalkan bahwa danterintegral Riemann padadanadalah konstanta, makadanterintegral Riemann dan

*;*

 *; dan*

**Bukti:**

Diketahui terintegral Riemann pada , namakan adalah nilai integral Riemann-nya. Ini berarti untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika adalah partisi pada dengan berakibat,

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan Teorema 1,

jadi,

Diketahui dan terintegral Riemann pada , namakan dan adalah nilai integral Riemann-nya. Ini berarti,

untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

Pilih , akibatnya jika

. Jadi, (3) dan (4) dipenuhi.

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan Teorema 1,

jadi,

Diketahui dan terintegral Riemann pada , namakan dan adalah nilai integral Riemann-nya. Ini berarti,

untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

untuk sebarang dapat dipilih sehingga jika

 adalah partisi pada dengan berakibat,

Pilih , akibatnya jika

. Jadi, (5) dan (6) dipenuhi.

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan Teorema 1,

jadi,

**Teorema 16** ( *Sifat Keterbatasan* )

Jika fungsi terintegral Riemann pada *,* makaterbatas pada.

**Bukti:** Dibuktikan secara kontradiksi.

Andaikan fungsi tak terbatas ke atas pada (analog untuk fungsi tak terbatas ke bawah), maka untuk setiap bilangan asli terdapat sehingga

Untuk setiap partisi , tentu . Hal ini berarti,

(tidak ada) yang dengan kata lain fungsi tak terintegral Riemann pada . Kontradiksi dengan yang diketahui bahwa terintegral Riemann pada . Jadi, terbatas.

# Pembahasan

Indrati (2002) membahas tentang Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n. Sifat-sifat yang berhasil dikembangkan meliputi sifat-sifat dasar Integral Henstock di , sifat Kekontinuan, sifat Kekonvergenan, Perluasan Harnack, dan sifat Cauchy serta Lemma Henstock. Achmad (2005) membahas karakteristik fungsi-fungsi yang terintegral Riemann. Fungsi yang dibahas dalam tulisan Achmad adalah fungsi dari ke . Selanjutnya, Andiwijaya (2012) yang membahas ketunggalan nilai integral Henstock dan sifat linear pada integral Henstock. Tulisan Andiwijaya merupakan pengembangan dari integral Riemann dengan mengubah bilangan positif menjadi fungsi positif . Fungsi-fungsi yang dibahas pada tulisan Andiwijaya adalah fungsi yang domainnya . Selanjutnya, Ilwaru, dkk. (2012) dalam tulisannya yang membahas beberapa teorema kekonvergenan pada integral Riemann. Fungsi yang dibahas masih fungsi dengan domain .

Pada tulisan ini berhasil disusun beberapa sifat-sifat dasar Integral Riemann pada meliputi sifat ketunggalan (Teorema 12), sifat kriteria Cauchy (Teorema 13), eksistensi integral Riemann (Teorema 14), sifat kelinearan (Teorema 15), dan sifat keterbatasan (Teorema 16),. Dalam menyusun sifat-sifat dasar tersebut, diawali dengan pendefinisian selang, partisi, dan Integral Riemann di . Hal ini merupakan penyederhanaan dari pengembangan partisi dan selang yang dilakukan Indrati (2002) di . Beberapa sifat yang belum sempat dibahas meliputi sifat Kekonvergenan dan sifat Kekontinuan.

# KESIMPULAN

Kesimpulan dalam penelitian ini adalah

1. Definisi integral Riemann di berhasil dikembangkan di .
2. Sifat ketunggalan pada integral Riemann di berhasil dikembangkan di .
3. Kriteria Cauchy pada integral Riemann di berhasil dikembangkan di .
4. Eksistensi integral Riemann di berhasil dikembangkan di .
5. Sifat kelinearan pada integral Riemann di berhasil dikembangkan di .
6. Sifat keterbatasan pada integral Riemann di berhasil dikembangkan di .

# DAFTAR PUSTAKA

Achmad, M. (2005). *Karakterikstik Fungsi-fungsi yang Terintegral Riemann*. (Skripsi tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Agustiani M. (1996). Integral Nonlinear Henstock (Tesis, tidak dipublikasikan). Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Andiwijaya. (2012). *Ketunggalan Nilai Integral Henstock dan Sifat Linear pada Integral Henstock* (Skripsi tidak dipublikasikan). Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis*.Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc. New York.

Indrati, C.R. (2002). *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclid Berdimensi-n* (Disertasi, tidak dipublikasikan). Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Ilwaru, V.Y., Wattimanela, H.J., & Talakua, M.W. (2012). *Beberapa Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann*. Jurnal Barekeng, Vol.6 No. 1 Hal. 13-18.

Nurdin. (2018). Perluasan Teorema Cauchy pada Integral Nonlinear Henstock pada Ruang Euclide . *Jurnal Pendidikan Biharul Ulum Ma’arif*, 2 (2). 522-527.

Pfeffer, W.F. (1993). *The Riemann Approach to Integration*. Cambridge: The United States of America.

Purcell, E.J., Dale, V., & Ringdon, S.E. (2010). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1*. Penerbit ERLANGGA: Jakarta.

Sinay, L.J. & Talakua, M.W. (2012). *Sifat-sifat Dasar Integral Henstock*. Jurnal Barekeng, Vol.6 No. 2 Hal. 7-15.