Aplikasi Ring Kuadratik dalam Menyelesaikan Persamaan *Pell*

Utami Priono1, a) , Wahidah Sanusi1, dan Muhammad Abdy1

1 Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar, 90224

a)utamipriono@yahoo.com

**Abstrak**. Artikel ini membahas tentang penerapan Metode ring $Z\left[\sqrt{d}\right]$ (kuadratik) dalam mencari solusi pada persamaan Pell. Persamaan Pell merupakan bagian dari persamaan Diophantine non linear yang penyelesaiannya berupa bilangan bulat dengan bentuk umum persamaannya yaitu $x^{2}-dy^{2}=\pm N$. Dalam penelitian ini persamaan Pell yang akan ditentukan solusinya yaitu $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode ring kuadratik. Metode ring kuadratik yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan Pell memperhatikan konsep norm dan unit pada bilangan $Z\left[\sqrt{d}\right]$. Berdasarkan hasil penelitian, persamaan Pell positif $x^{2}-dy^{2}=9$ memiliki paling tidak satu solusi dengan nilai $d$ yang dipilih. Sedangkan persamaan Pell negatif $x^{2}-dy^{2}=-9$ tidak selalu memiliki solusi, hanya pada nilai $d$ tertentu.

**Kata Kunci:** Persamaan Pell, Ring Kuadratik, Norm

**Abstract.** This article discusses the application of the ring $Z\left[\sqrt{d}\right]$ (quadratic) method in finding solutions of the Pell equation. The Pell equation is part of the non linear Diophantine equation whose the solution is integer with the general form of the equation is $x^{2}-dy^{2}=\pm N$. In this research, the Pell equation which the solution will be determined is $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$. The method used in this research is the quadratic ring method. The quadratic ring method that will be used in solving the Pell equation takes the concepts of norm and unit in $Z\left[\sqrt{d}\right]$ number. Based on this research, positive Pell equations is $x^{2}-dy^{2}=9$ has at least one solution with the value of $d$ that chosen. While the negative Pell equation is $x^{2}-dy^{2}=-9$ doesn’t always have a solution, just at certain values of $d$.

**Keywords:** Pell Equation, Quadratic Ring, Norm.

# PENDAHULUAN

Dalam teori bilangan dipelajari suatu persamaan, yaitu persamaan Diophantine. Persamaan Diophantine merupakan persamaan polynomial (dengan $n$ peubah) yang mensyaratkan solusinya berupa bilangan bulat. Diophantine terbagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine linear dan persamaan Diophantine nonlinear tergantung pada pangkat variabelnya. Bentuk persamaan Diophantine non linear seperti persamaan kuadrat, kubik, persamaan Phytagoras, Persamaan Bachet, Persamaan Pell, dan lain sebagainya. Dalam artikel ini, penulis akan menggunakan Persamaan Diophantine non linear, yaitu persamaan Diophantine kuadrat dengan dua peubah. Persamaan Diophantine kuadrat tersebut mempunyai bentuk umum $x^{2}-dy^{2}=N$, dimana $d $ adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, dan untuk setiap $N$ merupakan bilangan bulat tak nol. Persamaan Diophantine kuadrat tersebut juga dikenal dengan Persamaan Pell. Salah satu aplikasi persamaan Pell yaitu dalam bidang kriptografi, seperti penelitian yang dilakukan oleh Asha N (2014), yang berjudul Enforced Cinviction in Cryptographic Provenance Across Critical System Information.

Beberapa penelitian terdahulu yang membahas mengenai penyelesaian persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=N$ menunjukkan bahwa persamaan ini dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Seperti John Robertson (2004) menyelesaikan persamaan Pell melalui metode siklik, sistem Lagrange reduksi, algoritma Lagrange Matthews Mollin (LMM), bentuk biner kuadrat dan metode Algoritma PQa. Selanjutnya, Karina Sylfia Dewi (2016), telah menyelesaikan persamaan Diophantine non linear dengan mengaplikasikan ring $Z\left[i\right]$.

Pada artikel ini dibahas mengenai bagaimana langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$ dengan menggunakan metode ring kuadratik. Artikel ini bertujuan untuk menyelesaikan atau mencari solusi $x$ dan $y$ pada bilangan bulat yang memenuhi persamaan $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$ dengan menggunakan metode ring kuadratik.

# METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian murni, dimana metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji sumber pustaka atau literatur-literatur yang berkaitan dengan persamaan Pell, dan mengenai ring kuadratik. Untuk menyelesaikan persamaan Pell, digunakan konsep norm dan unit pada ring kuadratik, bilangan kuadratik tersebut dapat ditulis, $Z\left[\sqrt{d}\right]=\{a+b\sqrt{d} :a,b\in Z, d\in Z^{+}, d\ne a^{2}\}$. Untuk mencari solusi persamaan Pell tersebut digunakan teorema yang diperoleh dari konsep norm dan unit pada ring kuadratik.

# HASIL DAN PEMBAHASAN

## Penyelesaian Persamaan Pell dengan menggunakan Metode Ring Kuadratik

Dalam menyelesaikan persamaan Pell dengan metode ring kuadratik dibutuhkan solusi awal yang telah diketahui, maka berikut beberapa solusi awal dari persamaan Pell tersebut dengan nilai $d$ yang diberikan, yang diperoleh dari hasil perhitungan dengan menggunakan Aplikasi *Microsoft Office Excel 2010.*

TABEL 1 Solusi Awal Persamaan $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$d$$ | $$x^{2}-dy^{2}=9$$ | Solusi $(x\_{1},y\_{1})$ | $$x^{2}-dy^{2}=-9$$ | Solusi $(x\_{1},y\_{1})$ |
| 2 | $$x^{2}-2y^{2}=9$$ | $$(9, 6)$$ | $$x^{2}-2y^{2}=-9$$ | $$(3, 3)$$ |
| 3 | $$x^{2}-3y^{2}=9$$ | $$(6, 3)$$ | $$x^{2}-3y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 5 | $$x^{2}-5y^{2}=9$$ | $$(27, 12)$$ | $$x^{2}-5y^{2}=-9$$ | $$(6, 3)$$ |
| 6 | $$x^{2}-6y^{2}=9$$ | $$(15, 6)$$ | $$x^{2}-6y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 7 | $$x^{2}-7y^{2}=9$$ | $$(4, 1)$$ | $$x^{2}-7y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 8 | $$x^{2}-8y^{2}=9$$ | $$(9, 3)$$ | $$x^{2}-8y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 10 | $$x^{2}-10y^{2}=9$$ | $$(7, 2)$$ | $$x^{2}-10y^{2}=-9$$ | $$(1, 1)$$ |
| 11 | $$x^{2}-11y^{2}=9$$ | $$(30, 9)$$ | $$x^{2}-11y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 12 | $$x^{2}-12y^{2}=9$$ | $$(21, 6)$$ | $$x^{2}-12y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 13 | $$x^{2}-13y^{2}=9$$ | $$(29, 8)$$ | $$x^{2}-13y^{2}=-9$$ | $$(2, 1)$$ |
| 14 | $$x^{2}-14y^{2}=9$$ | $$(45, 12)$$ | $$x^{2}-14y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 15 | $$x^{2}-15y^{2}=9$$ | $$(12, 3)$$ | $$x^{2}-15y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 17 | $$x^{2}-17y^{2}=9$$ | $$(99, 24)$$ | $$x^{2}-17y^{2}=-9$$ | $$(12, 3)$$ |
| 18 | $$x^{2}-18y^{2}=9$$ | $$(9, 2)$$ | $$x^{2}-18y^{2}=-9$$ | $$(3, 1)$$ |
| 19 | $$x^{2}-19y^{2}=9$$ | $$(22, 5)$$ | $$x^{2}-19y^{2}=-9$$ | $$-$$ |
| 20 | $$x^{2}-20y^{2}=9$$ | $$(27, 6)$$ | $$x^{2}-20y^{2}=-9$$ | $$-$$ |

Misal $x,y \in Z\left[\sqrt{d}\right]$, dengan $x=\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right), y=\left(a\_{2}+b\_{2}\sqrt{d}\right)$ untuk suatu $a\_{1}, a\_{2}, b\_{1}, b\_{2}\in Z $dan $d\in Z^{+}, d\ne a\_{i}^{2} (i=1,2)$. Jika $y=\left(a\_{2}+b\_{2}\sqrt{d}\right)$ merupakan solusi dari persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ maka, $N\left(y\right)=y\overbar{y}=\left(a\_{2}+b\_{2}\sqrt{d}\right)\left(a\_{2}-b\_{2}\sqrt{d}\right)=9$. Namun untuk persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ dengan variabel $(a\_{1},b\_{1})$ yang dapat ditulis menjadi, $a\_{1}^{2}-db\_{1}^{2}=N\left(x\right)=\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)\left(a\_{1}-b\_{1}\sqrt{d}\right)=9$.

Maka agar $x$ menjadi unit haruslah $x=\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}$ sehingga,

 $N\left(x\right)=x\overbar{x}=\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)\left(\frac{\left(a\_{1}-b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=1$ (1)

Dengan mengalikan $x$ dan $y$, sesuai hasil pada persamaan (1) menjadi,

$$\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)\left(a\_{2}+b\_{2}\sqrt{d}\right)=\left(\frac{a\_{1}a\_{2}+b\_{1}b\_{2}d}{3}\right)+\left(\frac{a\_{1}b\_{2}+a\_{2}b\_{1}}{3}\right)\sqrt{d}$$

Jadi dengan memisahkan bilangan bulat pada bagian rasional dan bagian irrasionalnya maka diperoleh solusi untuk persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ adalah $\left(\frac{a\_{1}a\_{2}+b\_{1}b\_{2}d}{3}, \frac{ a\_{1}b\_{2}+a\_{2}b\_{1}}{3}\right)$, dengan $x$ bisa sama dengan $y$.

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh bahwa $\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}$ merupakan unit dari ring $Z\left[\sqrt{d}\right]$ sehingga $N\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=1$. Akibatnya karena yang dicari merupakan solusi dari persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$, maka dengan mengasumsikan $(a\_{1},b\_{1})$ merupakan solusi dari persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$, dan karena $\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}$ merupakan unit dimana,

$N\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)∙\left(\frac{\left(a\_{1}-b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=\left(\frac{a\_{1}^{2}-db\_{1}^{2}}{9}\right)=1$.

Sehingga, agar memenuhi persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ yaitu dengan norm $N\left(\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=9$, maka,

$\left(3\frac{\left(a\_{1}+b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)∙\left(3\frac{\left(a\_{1}-b\_{1}\sqrt{d}\right)}{3}\right)=\left(9\frac{a\_{1}^{2}-db\_{1}^{2}}{9}\right)=9.1=9$.

Jadi berdasarkan teorema 4.2.5 pada (Andresscu, 2010:165) dimana setiap solusi persamaan $x^{2}-dy^{2}=1$ dapat ditulis dengan $\left(x\_{n}+y\_{n}\sqrt{d}\right)=\left(x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}\right)^{n}$ dan berdasarkan persamaan (1), maka setiap solusi pada persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$ dapat ditulis dengan $\left(x\_{n}+y\_{n}\sqrt{d}\right)=\pm 3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}$, untuk $=1,2…$ .

### **Penyelesaian Persamaan Pell** $x^{2}-dy^{2}=9$

Teorema 1

Misal $d$ bilangan bulat positif dan bukan kuadrat sempurna. Jika $(x\_{1},y\_{1})$ adalah solusi awal dari

$x^{2}-dy^{2}=9$ maka solusi umum $(x\_{n},y\_{n})$ memenuhi,

$\left(x\_{n}+y\_{n}\sqrt{d}\right)=\pm 3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}$, $n=1,2…$

Bukti :

Dengan diketahui $x^{2}-dy^{2}=9$, misal solusi positif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $x+y\sqrt{d}=3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}$, diperoleh,

$x^{2}-dy^{2}=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right)$ $=\left(3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}\right)\left(3\left(\frac{x\_{1}-y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}\right)$

$=9\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{n}$

$$=9\left(\frac{9}{9}\right)^{n}$$

$$=9$$

Dengan diketahui $x^{2}-dy^{2}=9$, misal solusi negatif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $\left(x\_{n}+y\_{n}\sqrt{d}\right)=-3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}$, diperoleh,

$x^{2}-dy^{2}=\left(-\left(x+y\sqrt{d}\right)\right)\left(-\left(x-y\sqrt{d}\right)\right)$

$$=\left(3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}\right)\left(3\left(\frac{x\_{1}-y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{n}\right)$$

$$=9\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{n}$$

$$=9\left(\frac{9}{9}\right)^{n}$$

$=9$*.*

Contoh 1

Carilah dua nilai $x$ dan $y$ yang memenuhi persamaan $x^{2}-3y^{2}=9$ dengan solusi awal $x\_{1}=6$ dan $y\_{1}=3$ !

Jawab :

Diketahui solusi awal persamaan di atas adalah $x\_{1}=6$ dan $y\_{1}=3$*.* Untuk $x\_{2}$ dan $y\_{2}$ maka:

$$\left(x\_{2}+y\_{2}\sqrt{d}\right)=\pm 3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2}$$

$$=3\left(\frac{6+3\sqrt{3}}{3}\right)^{2}$$

$$=(21+12\sqrt{3})$$

Jadi terbukti bahwa jika $\left(6,3\right)$ adalah solusi awal dari $x^{2}-3y^{2}=9$, diperoleh solusi $\left(x\_{2},y\_{2}\right)=(21, 12)$.

Berdasarkan penelitian Rafika (2014), misalkan diketahui solusi awal dari persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$ adalah $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$, maka jika $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$ dibentuk ke dalam matriks akan menghasilkan matriks berordo $2×1$ yaitu $\left(\begin{matrix}x\_{1}\\y\_{1}\end{matrix}\right), n=1$. Untuk mencari solusi ke-$n$ dari $x\_{n}$ dan $y\_{n}$ pada persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ berdasarkan hasil penelitian Rafika (2014) diperoleh rumus :

 $\left(\begin{matrix}u\_{n}\\v\_{n}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{n}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$ (2)

dengan nilai,

 $x\_{n}=\frac{u\_{n}}{3^{n-1}}$ dan $y\_{n}=\frac{v\_{n}}{3^{n-1}}$ (3)

Perhatikan bahwa persamaan (2) dapat ditulis sebagai,

$$\left(\begin{matrix}u\_{n}\\v\_{n}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{n}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$$

$$=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{n-1}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$$

$$=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}u\_{n-1}\\v\_{n-1}\end{matrix}\right)$$

$=\left(\begin{matrix}x\_{1}u\_{n-1}+dy\_{1}v\_{n-1}\\y\_{1}u\_{n-1}+x\_{1}v\_{n-1}\end{matrix}\right)$ (4)

Teorema 2

Jika $\left(x\_{1}, y\_{1}\right)$ merupakan solusi awal dari persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$, maka untuk $n\geq 2$,

$x\_{n}=\frac{x\_{1}x\_{n-1}+dy\_{1}y\_{n-1}}{3}$, dan $y\_{n}=\frac{y\_{1}x\_{n-1}+x\_{1}y\_{n-1}}{3}$

Bukti :

Diketahui bahwa berdasarkan persamaan (4), $u\_{n}=x\_{1}u\_{n-1}+dy\_{1}v\_{n-1}$, $v\_{n}=y\_{1}u\_{n-1}+x\_{1}v\_{n-1}$ dan berdasarkan persamaan (3) maka $u\_{n}=3^{n-1}x\_{n}$, $v\_{n}=3^{n-1}y\_{n}$. Jadi $u\_{n-1}=3^{n-2}x\_{n-1}$ dan $v\_{n-1}=3^{n-2}y\_{n-1}$. Akibatnya diperoleh,

$$u\_{n}=x\_{1}u\_{n-1}+dy\_{1}v\_{n-1}$$

$$3^{n-1}x\_{n}=x\_{1}3^{n-2}x\_{n-1}+dy\_{1}3^{n-2}y\_{n-1}$$

$$3^{n-1}x\_{n}=3^{n-2}(x\_{1}x\_{n-1}+dy\_{1}y\_{n-1})$$

$$x\_{n}=\frac{x\_{1}x\_{n-1}+dy\_{1}y\_{n-1}}{3}$$

dan,

$$v\_{n}=y\_{1}u\_{n-1}+x\_{1}v\_{n-1}$$

$$3^{n-1}y\_{n}=y\_{1}3^{n-2}x\_{n-1}+x\_{1}3^{n-2}y\_{n-1}$$

$$3^{n-1}y\_{n}=3^{n-2}(y\_{1}x\_{n-1}+x\_{1}y\_{n-1})$$

$$y\_{n}=\frac{y\_{1}x\_{n-1}+x\_{1}y\_{n-1}}{3}$$

Contoh 2

Tentukan solusi kedua dengan menggunakan teorema 2 untuk persamaan Pell$x^{2}-8y^{2}=9$ dengan solusi awal $\left(x\_{1},y\_{1}\right)=(9, 3)$ !

Jawab :

Diketahui solusi awal dari persamaan $x^{2}-8y^{2}=9$ merupakan $\left(x\_{1},y\_{1}\right)=(9,3)$, maka dengan menggunakan teorema 2 diperoleh solusi kedua persamaan tersebut adalah,

$$x\_{2}=\frac{x\_{1}x\_{1}+8∙y\_{1}y\_{1}}{3}$$

$$=\frac{9∙9+8∙3∙3}{3}$$

$$=51$$

$$y\_{2}=\frac{y\_{1}x\_{1}+x\_{1}y\_{1}}{3}$$

$$=\frac{3∙9+9∙3}{3}$$

$$=18$$

Jadi solusi kedua dari persamaan $x^{2}-8y^{2}=9$ merupakan $\left(x\_{2},y\_{2}\right)=(51,18)$.

## Penyelesaian Persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=-9$

Teorema 3

Misal $d$ bilangan bulat positif dan bukan kuadrat sempurna. Jika $\left(x\_{1},y\_{1}\right)$ adalah solusi awal dari $x^{2}-dy^{2}=-9$, maka solusi umum $(x\_{m},y\_{m})$ (untuk suatu $m=1,2,…$, dimana $n=m-1)$ berbentuk:

$$\left(x\_{2n+1}+y\_{2n+1}\sqrt{d}\right)=\pm 3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}, n=0,1,…$$

Bukti :

Dengan diketahui $x^{2}-dy^{2}=-9$, misal solusi positif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $\left(x+y\sqrt{d}\right)=3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}$ diperoleh,

$$x^{2}-dy^{2}=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right)$$

$=\left(3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)\left(3\left(\frac{x\_{1}-y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)$

$$=9\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{2n+1}$$

$$=9\left(\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{2}\right)^{n}\left(\frac{-9}{9}\right)$$

$$=9\left(\left(\frac{-9}{9}\right)^{2}\right)^{n}\left(-1\right)$$

$$=-9$$

Dengan diketahui $x^{2}-dy^{2}=-9$, misal solusi negatif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah$\left(x\_{n}+y\_{n}\sqrt{d}\right)=-3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}$ diperoleh,

$$x^{2}-dy^{2}=\left(-\left(x+y\sqrt{d}\right)\right)\left(-\left(x-y\sqrt{d}\right)\right)$$

$=\left(3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)\left(3\left(\frac{x\_{1}-y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)$

$$=9\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{2n+1}$$

$$=9\left(\left(\frac{x\_{1}^{2}-dy\_{1}^{2}}{9}\right)^{2}\right)^{n}\left(\frac{-9}{9}\right)$$

$$=9\left(\left(\frac{-9}{9}\right)^{2}\right)^{n}\left(-1\right)$$

$=-9$

Contoh 3

Cari nilai $x\_{2}$ dan $y\_{2}$ yang memenuhi persamaan $x^{2}-17y^{2}=-9$ dengan solusi awal $x\_{1}=12$ dan $y\_{1}=3$ !

Jawab:

Diketahui solusi awal dari persamaan Pell $x^{2}-17y^{2}=-9$ adalah $x\_{1}=12$ dan $y\_{1}=3$,

selanjutnya, untuk $x\_{2}$ dan $y\_{2}$ maka berdasarkan teorema 3 diperoleh:

$$\left(x\_{2.1+1}+y\_{2.1+1}\sqrt{d}\right)=\pm 3\left(\frac{x\_{1}+y\_{1}\sqrt{d}}{3}\right)^{2.1+1}$$

$$=3\left(\frac{12+3\sqrt{17}}{3}\right)^{3}$$

$=\left(804+195\sqrt{17}\right)$

Diperoleh $x\_{m}=x\_{2}=804$ dan $y\_{m}=y\_{2}=195$*.* Dari contoh 3 di atas, maka dapat disimpulkan bahwa nilai $\left(x\_{m},y\_{m}\right) $yang memenuhi persamaan $x^{2}-17y^{2}=-9 $ berturut-turut $(12, 3)$ dan $(804, 195)$.

Berdasarkan penelitian Rafika (2014), misalkan $x\_{1}$ dan $y\_{1}$ adalah solusi awal, maka untuk persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=-9$ diperoleh solusi,

 $\left(\begin{matrix}u\_{2n+1}\\v\_{2n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{2n+1}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$ (5)

Dengan nilai

 $x\_{2n+1}=\frac{u\_{2n+1}}{3^{2n}} $dan $y\_{2n+1}=\frac{v\_{2n+1}}{3^{2n}}$. (6)

Perhatikan bahwa persamaan (6) dapat ditulis sebagai

$$\left(\begin{matrix}u\_{2n+1}\\v\_{2n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{2n+1}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$$

$$=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{2}\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{2n-1}\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)$$

$$=\left(\begin{matrix}x\_{1}&dy\_{1}\\y\_{1}&x\_{1}\end{matrix}\right)^{2}\left(\begin{matrix}u\_{2n-1}\\v\_{2n-1}\end{matrix}\right)$$

$\left(\begin{matrix}u\_{2n+1}\\v\_{2n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})u\_{2n-1}+2dx\_{1}y\_{1}v\_{2n-1}\\2x\_{1}y\_{1}u\_{2n-1}+(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})v\_{2n-1}\end{matrix}\right)$ (7)

Teorema 4

Misal persaman Pell $x^{2}-dy^{2}=-9$ mempunyai solusi di bilangan bulat positif dan misal $(x\_{1},y\_{1})$ merupakan solusi awalnya. Solusi umum pada persamaan $x^{2}-dy^{2}=-9 $diberikan oleh $(x'\_{m},y'\_{m})$ (untuk suatu $m=1,2,…$, $n=1,2…$, dimana $n=m-1) $dimana,

$x\_{2n+1}=\frac{(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})x\_{2n-1}+2dx\_{1}y\_{1}y\_{2n-1}}{9}$, dan $y\_{2n+1}=\frac{2x\_{1}y\_{1}x\_{2n-1}+(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})y\_{2n-1}}{9}$

Bukti :

Diketahui bahwa $u\_{2n+1}=3^{2n}x\_{2n+1}$, $v\_{n}=3^{2n}v\_{2n+1}$. Sehingga $u\_{2n-1}=3^{2n-2}x\_{2n-1}$ dan $v\_{2n-1}=3^{2n-2}y\_{2n-1}$. Dari persamaan (6) dan (7) diperoleh,

$$u\_{2n+1}=(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})u\_{2n-1}+2dx\_{1}y\_{1}v\_{2n-1}$$

$$3^{2n}x\_{2n+1}=(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})(3^{2n-2}x\_{2n-1})+2dx\_{1}y\_{1}(3^{2n-2}y\_{2n-1})$$

$$3^{2n}x\_{2n+1}=3^{2n-2}[\left(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2}\right)x\_{2n-1}+2dx\_{1}y\_{1}y\_{2n-1}]$$

$$x\_{2n+1}=\frac{\left(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2}\right)x\_{2n-1}+2dx\_{1}y\_{1}y\_{2n-1}}{9}$$

dan,

$$v\_{2n+1}=2x\_{1}y\_{1}u\_{2n-1}+(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})v\_{2n-1}$$

$$3^{2n}y\_{2n+1}=2x\_{1}y\_{1}(3^{2n-2}x\_{2n-1})+(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})(3^{2n-2}y\_{2n-1})$$

$$3^{2n}y\_{2n+1}=3^{2n-2}[2x\_{1}y\_{1}x\_{2n-1}+\left(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2}\right)y\_{2n-1}]$$

$$y\_{2n+1}=\frac{2x\_{1}y\_{1}x\_{2n-1}+\left(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2}\right)y\_{2n-1}}{9}$$

Contoh 4

Carilah solusi dari persamaan Pell $x^{2}-5y^{2}=-9$ dengan solusi awal $\left(x\_{1},y\_{1}\right)=(6,3)$ dengan menggunakan teorema di atas !

Jawab :

Diketahui solusi awal dari persamaan $x^{2}-5y^{2}=-9$ merupakan $\left(x\_{1},y\_{1}\right)=(6,3)$, maka dengan menggunakan teorema di atas diperoleh solusi dari persamaan tersebut adalah,

$x\_{2.1+1}=\frac{(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})x\_{1}+2dx\_{1}y\_{1}y\_{1}}{9}$

$$=\frac{(6^{2}+5∙3^{2})6+2∙5∙6∙3∙3}{9}$$

$$=114$$

$$y\_{2.1+1}=\frac{2x\_{1}y\_{1}x\_{1}+(x\_{1}^{2}+dy\_{1}^{2})y\_{1}}{9}$$

$$=\frac{2∙6∙3∙6+(6^{2}+5∙3^{2})3}{9}$$

$$=51$$

Jadi solusi kedua dari persamaan $x^{2}-5y^{2}=-9$ merupakan $\left(x'\_{m},y'\_{m}\right)=\left(x'\_{2},y'\_{2}\right)=(114,51)$.

## Kriteria Persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=-9$ yang Memiliki Solusi

Teorema 5

Misal $d$ merupakan bilangan prima dimana $d≡1($mod $4)$. Persamaan

 $x^{2}-dy^{2}=-9$ (8)

Memiliki solusi jika dan hanya jika persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$ memiliki solusi.

Bukti :

Diketahui $d$ merupakan bilangan prima dimana $d≡1($mod $4)$. Misal persamaan (8) memiliki solusi, sehingga terdapat $r, s\in Z $ dan memenuhi $r^{2}-ds^{2}=-9$. Akan dibuktikan persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$ juga memiliki solusi. Berdasarkan teorema 2.23 pada (Smith, 2009:38) dimana misal $d$ bilangan prima, maka persamaan Pell negatif $x^{2}-dy^{2}=-1$ mempunyai solusi di bilangan bulat positif jika dan hanya jika $d≡1 ($mod $4)$. Sehingga dengan $d≡1($mod $4)$, persamaan $x^{2}-dy^{2}=-1$ memiliki solusi maka terdapat $u, v\in Z$ yang memenuhi persamaan tersebut. Dan dengan menggunakan prinsip perluasan perkalian pada (Andresscu, 2015:68) maka,

$$(ur\pm dvs)^{2}-d\left(us\pm vr\right)^{2}=(-9)(-1)$$

$$(ur\pm dvs)^{2}-d\left(us\pm vr\right)^{2}=9$$

Misal $p=(ur\pm dvs)$ dan $q=\left(us\pm vr\right)$, ini berarti terdapat $p, q\in Z$ yang merupakan solusi dari persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$. Untuk membuktikan sebaliknya, diketahui $d$ merupakan bilangan prima dimana $d≡1($mod $4)$. Misal persamaan $x^{2}-dy^{2}=9$ memiliki solusi, sehingga terdapat $a, b\in Z $ dan memenuhi persamaan tersebut. Akan dibuktikan persamaan $x^{2}-dy^{2}=-9$ juga memiliki solusi. Dengan menggunakan teorema 2.23 pada (Smith, 2009:38) maka persamaan $x^{2}-dy^{2}=-1$ memiliki solusi maka terdapat $u, v\in Z$ yang memenuhi persamaan tersebut. Sehingga dengan menggunakan prinsip perluasan perkalian pada (Andresscu, 2015:68) maka,

$$(ua\pm dvb)^{2}-d\left(ua\pm vb\right)^{2}=(9)(-1)$$

$$(ua\pm dvb)^{2}-d\left(ua\pm vb\right)^{2}=-9$$

Misal $c=(ua\pm dvb)$ dan $d=\left(ua\pm vb\right)$, ini berarti terdapat $c, d\in Z$ yang merupakan solusi dari persamaan $x^{2}-dy^{2}=-9$.

# KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa dalam menyelesaikan persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$ dengan menggunakan metode ring $Z\left[\sqrt{d}\right]$ memiliki langkah yang lebih singkat, yaitu dengan menggunakan teorema-teorema yang berkaitan dengan konsep norm pada ring $Z\left[\sqrt{d}\right]$. Untuk menyelesaikan persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=\pm 9$, perlu mencari penyelesaian awalnya terlebih dahulu. Diperoleh pula bahwa, solusi persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=9$ paling tidak memiliki satu solusi, sedangkan persamaan Pell $x^{2}-dy^{2}=-9$ tidak selalu memiliki solusi, hanya pada nilai $d$ tertentu persamaan Pell negatif memiliki solusi.

Peneliti lain dapat mengembangkan penelitian ini yaitu, menggunakan persamaan Pell dengan nilai $N$ yang berbeda atau dengan menggunakan persamaan Diophantine lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I. (2010). *An Introduction to Diophantine Equation*. London: Birkhauser.

Andreescu, T., Andrica, D. (2015). *Quadratic Diophantine Equation*. New York: Springer.

Asha, N. (2014). Enforced Cinviction in Cryptographic Provenance Across Critical System Information*.* *International Journal of Computer Science and Information Technologies, Vol. 5(3), 2014, 3491-3493*. [http://ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue03/ ijcsit20140503185.pdf](http://ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue03/%20ijcsit20140503185.pdf). diakses pada tanggal 5 September 2018.

Dewi, K.S. (2016). *Konsep Keterbagian Pada Ideal Dalam Ring* $Z\left[i\right]$ *dan Aplikasinya Untuk Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Linear*. Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Mollin, R.A. (2010). A Note on the Negative Pell Equation. *International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 19, 919-922.*

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. (1991). *Introduction to The Theory Number*. New York: John Wiley Addison

Rafika. 2012. *Penyelesaian Persamaan Pell Dengan Menggunakan Metode Pecahan Berulang dan Metode Matriks*. Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Robertson, J. P. (2004). *Solving The Generalized Pell Equation* $x^{2}-dy^{2} = N$*.* <http://www.jpr2718.org/pell.pdf>. diakses pada tanggal 28 November 2018.

Smith, J.(2009). *Solvability Characterizations of Pell Like Equations.* Boise State University, Boise.

Tekcan, A. (2007). The Pell Equation $x^{2}-dy^{2}=\pm 4$. *Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 8, 363-369.* <http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password5-8-2007/tekcanAMS5-8-2007.pdf>. diakses pada tanggal 28 November 2017.