Solusi Persamaan Riccati Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Muhammad Abdy1, Ahmad Zaki1, dan Amni Rasyidah1, a)

1Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224

a) amrasyidah@gmail.com

**Abstrak**. Penelitian ini bertujuan untuk memahami kajian matematis persamaan Riccati dan metode Adams-Bashforth-Moulton serta mengetahui solusi persamaan Riccati menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan metode numerik yang digunakan untuk mencari solusi numerik pada titik tertentu dari suatu persamaan Riccati dengan nilai awal yang telah diketahui. Persamaan Riccati tersebut terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta orde empat untuk memperoleh empat solusi awal yang kemudian disubtitusikan pada persamaan prediktor Adam-Bashforth orde empat. Selanjutnya nilai prediksi tersebut diperbaiki pada persamaan korektor Adam-Moulton orde empat dan diselesaikan dengan iterasi hingga memenuhi kriteria pemberhentian. Agar kriteria pemberhentian terpenuhi dengan jumlah iterasi yang sedikit maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah . Hasil penelitian menunjukkan bahwa persamaan Riccati dapat diperoleh dari memanipulasi suatu persamaan sebarang sehingga diperoleh bentuk persamaan umum Riccati dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat diperoleh dengan menggunakan interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga serta metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Riccati dengan nilai yang optimal.

**Kata Kunci:** Metode Runge Kutta, metode Adam-Bashforth, metode Adam-Moulton

**Abstract.** This study aims to understand the mathematical study of the Riccati equation and the Adams-Bashforth-Moulton method then to find out the Riccati equation solution using the Adams-Bashforth-Moulton method. The Adams-Bashforth-Moulton method is a numerical method used to find numerical solutions at a certain point of a Riccati equation with a known initial value. The Riccati equation was first solved using the fourth order Runge Kutta method to obtain four initial solutions which were then substituted for the fourth order Adam-Bashforth predictor equation. Furthermore, the predicted value is corrected in the Adam-Moulton corrector equation of the fourth order and be solved by iterations until discontinue criteria completed. For the discontinue criteria to be completed by a bit of iterations, an analysis of the selection criteria for step size . The results showed that the Riccati equation can be obtained from manipulating any equation so that Riccati's general equation forms and fourth order Adams-Bashforth-Moulton methods were obtained by using Newton's three degree interpolation between three degrees and the Adams-Bashforth-Moulton method can be used in solving Riccati equations with optimal value.

**Keywords:** Runge Kutta method, Adam-Bashforth method, Adam-Moulton method

# PENDAHULUAN

Persamaan Riccati merupakan representasi matematis yang berasal dari persoalan-persoalan teknik, rekayasa dan sains terapan, seperti pemrosesan random, difusi, stokastik, sintesa jaringan dan matematika finansial. Persamaan Riccati merupakan persamaan differensial nonlinear dengan bentuk persamaan yang cukup kompleks, sehingga beberapa teknik analitik tidak dapat menyelesaikan persoalan ini (Wartono, 2013). Untuk itu digunakan metode numerik dalam menyelesaikan persamaan differensial non linear tersebut. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan diferensial non linear adalah metode Adams-Bashforth-Moulton.

Metode Adams-Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah dalam memperoleh solusi. Langkah pertama adalah prediksi dan langkah kedua adalah koreksi. Metode prediktor-korektor adalah suatu satu himpunan dua persamaan untuk . Persamaan pertama disebut predictor, digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk) ; persamaan kedua, yang disebut korektor, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk) (Nurman, 2017).

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan mengenai persamaan Riccati maupun metode Adams-Bashforth-Moulton (Muliani, 2016; Sari, Yundari & Helmi, 2014; Wartono, 2013). Diantaranya metode dekomposisian Adomian Laplace yang merupakan metode semi analitik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dikombinasikan dengan transformasi Laplace dan metode adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial Riccati yang termasuk dalam persamaan diferensial nonlinier. Pada penelitian sebelumnya, persamaan Riccati hanya diselesaikan dengan metode one step dan secara analitik, maka pada penelitian ini peneliti menggunakan metode two step yaitu metode Adams-Bashforth-Moulton dalam menyelesaikan persamaan Riccati.

Penelitian ini mengkaji solusi persamaan Riccati yang diselesaikan dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. Penelitian ini bertujuan untuk memahami kajian matematis persamaan Riccati dan metode Adams-Bashforth-Moulton serta mengetahui solusi persamaan Riccati menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.

# METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau murni yang dilakukan dengan metode kepustakaan atau studi literatur. Dalam menyelesaikan persamaan Riccati menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan masalah nilai awal persamaan Riccati

dengan nilai awal dengan ukuran langkah yang tetap dan .

1. Menghitung empat solusi awal dan dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat
2. Menentukan nilai , , , dengan pada persamaan
3. Menentukan solusi numerik dengan mensubtitusi empat solusi awal ke persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde empat
4. Memperbaiki hasil prediksi dengan mensubtitusi hasil prediksi metode Adams-Bashforth ke persamaan korektor Adams-Moulton orde empat
5. Dilakukan iterasi hingga galat relatif memenuhi kriteria pemberhentian yaitu .
6. Jika kriteria pemberhentian tidak dipenuhi, maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah yaitu:
* jika , maka diganti dengan ,
* jika , maka diganti dengan ,
* jika , maka kembali digunakan yang sama (Mathews, 2004).

# HASIL penelitian

## Kajian Matematis Persamaan Riccati

Diberikan suatu persamaan (Albab, 2013):

 (1)

dimana . yaitu sebarang fungsi-fungsi yang diberikan dan yaitu sebarang konstanta. Jika dan maka turunan persamaan diperoleh:

 (2)

 (3)

Solusi untuk persamaan (2)

 (4)

Solusi untuk persamaan (3)

 (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

 (6)

Misalkan maka persamaan (6) menjadi

 (7)

Persamaan (7) dikali dengan

 (8)

Jika

Untuk , mka persamaan (8) menjadi

atau

 (9)

Persamaan (9) dikalikan dengan (-1) menjadi

 (10)

dimana . Persamaan (10) disebut persamaan Riccati.

## Kajian Matematis Metode Adams-Bashforth-Moulton

Diberikan persamaan diferensial non linear orde satu dengan nilai awal sebagai berikut:

 (11)

Persamaan (11) diintegralkan dari sampai untuk mendapatkan solusi pada titik , sehingga diperoleh

Apabila merupakan persamaan yang kompleks yang tidak dapat diintegralkan, diganti dengan polynomial interpolasi agar dapat diintegralkan lebih jauh lagi.

 (12)

Interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dipilih untuk mendapatkan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Rumus interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dapat dituliskan sebagai berikut:

dengan

Kemudian polinomial diintegralkan dari sampai . Jika dan masing-masing disubstitusi ke dalam persamaan maka berturut-turut akan diperoleh dan . Dikarenakan dan jika diturunkan terhadap variabel , maka diperoleh .

Sehingga didapat:

 (13)

Didefinisikan bahwa , oleh karena itu diperoleh:

 (14)

Apabila persamaan (14) disubstitusikan ke persamaan (13), maka akan diperoleh metode Adams-Bashforth orde empat dengan rumus sebagai berikut:

 (15)

Sebelumnya pada metode Adam-Bashforth digunakan interpolasi selisih mundur Newton derajat tiga yang menginterpolasi pada titik ,,,. Metode Adam-Moulton orde empat dapat diperoleh jika polinomial pada persamaan merupakan polinomial interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi di titik ,,, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

dengan

Sekarang polinomial diintegralkan terhadap variabel dari titik sampai , hal ini bersesuaian dengan pengintegralan terhadap variabel dari sampai

 (16)

Kemudian ditinjau kembali persamaan untuk dan hasilnya disubtitusikan ke persamaan (16) maka diperoleh metode Adams-Moulton orde empat dengan rumus sebagai berikut:

 (17)

dengan yang menunjukkan bahwa persamaan (17) dapat diselesaikan secara iterasi. Untuk menggunakan persamaan (17), diperlukan nilai prediksi yang merupakan hasil dari penggunaan persamaan (15).

## Penyelesaian Persamaan Riccati Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Berikut diberikan beberapa contoh persamaan Riccati yang diselesaikan dengan metode Adams-Bashforth-Moulton:

1. Diberikan masalah nilai awal persamaan Riccati:

Dari masalah nilai awal tersebut diketahui bahwa dan serta dengan ukuran langkah misal . Dengan metode Runge Kutta orde empat diperoleh solusi awal dan yaitu:

**TABEL 1**. Solusi Awal Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0,1 | 0,11029 | 1,20842 |
| 2 | 0,2 | 0,24197 | 1,42539 |
| 3 | 0,3 | 0,39510 | 1,63409 |

Akan dicari nilai dengan mensubtitusi empat nilai awal ke persamaan prediktor yaitu persamaan Adams Bashforth orde empat sehingga diperoleh:

diperoleh .

Kemudian memperbaiki hasil prediksi menggunakan persamaan korektor yaitu persamaan Adams Moulton orde empat sehingga diperoleh:

Selanjutnya dilakukan iterasi hingga galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian tertentu, misal .

**TABEL 2.** Iterasi dengan Ukuran Langkah

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Galat relatif |
|  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| 4 | 0,4 | 0,56797 |  |  |
| 5 | 0,5 | 0,75608 |  |  |
| 6 | 0,6 | 0,95339 |  |  |
| 7 | 0,7 | 1,15263 |  |  |
| 8 | 0,8 | 1,34596 |  |  |
| 9 | 0,9 | 1,52655 |  |  |
| 10 | 1,0 | 1,68928 |  |  |
| 11 | 1,1 | 1,83120 |  |  |
| 12 | 1,2 | 1,95146 |  |  |
| 13 | 1,3 | 2,05090 |  |  |
| 14 | 1,4 | 2,13149 |  |  |
| 15 | 1,5 | 2,19576 |  |  |
| 16 | 1,6 | 2,24637 |  |  |
| 17 | 1,7 | 2,28581 |  |  |
| 18 | 1,8 | 2,31633 |  |  |
| 19 | 1,9 | 2,33979 |  |  |
| 20 | 2,0 | 2,35776 |  |  |

Untuk mendekati galat yang telah ditentukan dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah , digunakan solusi numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

Dari hasil tersebut terlihat bahwa , sehingga ukuran langkah harus diubah menjadi maka kemudian dihitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

Berikut ini adalah tabel dari solusi menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dengan :

**TABEL 3.** Iterasi dengan Ukuran Langkah

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Galat relatif |
|  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Agar lebih mendekati dengan galat yang telah ditentukan maka kembali dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah yaitu kembali digunakan solusi numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

Dari hasil tersebut terlihat bahwa , sehingga langkah berikutnya kembali digunakan maka kemudian dihitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

Berikut ini adalah tabel dari solusi menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dengan :

**TABEL 4.** Iterasi dengan Ukuran Langkah

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **Galat relatif** |
|  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Dari **Tabel 4** terlihat bahwa galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian pada iterasi ke- berarti iterasi yang diperoleh pada lebih sedikit dibandingkan nilai langkah sebelumnya. Jika dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah maka akan diperoleh:

Dari hasil tersebut terlihat bahwa , sehingga langkah berikutnya digunakan yang sama berarti iterasi dihentikan pada iterasi ke- dengan .

Dengan demikian, solusi numerik persamaan diferensial dengan nilai awal dan dengan ukuran langkah telah optimal dan solusi numerik yang dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian .

1. Diberikan masalah nilai awal persamaan Riccati:

Dari masalah nilai awal tersebut diketahui bahwa dan serta dengan ukuran langkah misal . Dengan metode Runge Kutta orde empat diperoleh solusi awal dan yaitu:

**TABEL 5.** Solusi Awal Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0,1 | 1,10517 | 1,10517 |
| 2 | 0,2 | 1,23000 | 1,22131 |
| 3 | 0,3 | 1,35928 | 1,34974 |

Akan dicari nilai dengan mensubtitusi empat nilai awal ke persamaan prediktor yaitu persamaan Adams Bashforth orde empat sehingga diperoleh:

diperoleh

Kemudian memperbaiki hasil prediksi menggunakan persamaan korektor yaitu persamaan Adams Moulton orde empat sehingga diperoleh:

Selanjutnya dilakukan iterasi hingga galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian tertentu, misal .

**TABEL 6.** Iterasi dengan Ukuran Langkah

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Galat relatif |
|  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Untuk lebih mendekati galat yang telah ditentukan dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah , digunakan solusi numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

Dari hasil tersebut terlihat bahwa , sehingga ukuran langkah yang digunakan tetap.

Dengan demikian, nilai yang digunakan tetap yaitu sehingga solusi numerik persamaan diferensial dengan nilai awal dan telah optimal dan solusi numerik yang dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian .

# penutup

Dari hasil penelitian dapat ditarik kesimpulan bahwa persamaan Riccati dapat diperoleh dari memanipulasi suatu persamaan sebarang sehingga diperoleh bentuk persamaan umum Riccati dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat diperoleh dengan menggunakan interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yaitu pada persamaan prediksi digunakan interpolasi selisih mundur Newton derajat tiga yang menginterpolasi pada titik ,,, serta pada persamaan korektor digunakan interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi di titik ,,, serta dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah apabila kriteria pemberhentian tidak terpenuhi.

Penelitian yang dapat dilakukan peneliti selanjutnya yaitu menggunakan metode lain yang memiliki orde yang lebih tinggi dalam menyelesaikan persamaan Riccati atau dalam menentukan nilai awal persamaan Riccati, peneliti lainnya dapat menggunakan metode yang lain seperti metode Runge Kutta Fehlberg, Runge Kutta Merson maupun Runge Kutta Gill bahkan peneliti selanjutnya dapat membandingkan ketiga metode tersebut dalam memperoleh solusi awal persamaan Riccati.

# Daftar pustaka

Albab, M. U. (2013). *Analisis Solusi Umum Persamaan Riccati*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Mathews, J. H. & Fink, K. K. (2004). *Numerical Methods Using Matlab*. New Jersey: 4th Edition. Prentice-Hall Inc.

Muliani. (2016). Solusi Persamaan Diferensial Riccati dengan Metode Dekomposisi Adomian Sumudu. Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Nurman, T.A. & Abdullah, S. (2017)*.* Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton Pada Persamaan Logistik Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk Di Provinsi Sulawesi Selatan. *Jurnal MSA*, *Volume* 5, No 1.

Sari, F.M. Yundari. & Helmi. (2014). Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster).* *Volume* 03, No 2.

Wartono & Muhaijir, M.N. (2013). Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Sains Teknologi dan Industri*, Volume 10, No.2.