Penentuan Nilai Eigen Suatu Matriks Kompleks Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan *Shift*

Rahmat Syam[1], Ahmad Zaki [2], Nursaadah [3,a]
[1,2,3)]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224*
[1)]rahmat.syam@unm.ac.id, [3)]nursaadah772@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini mengkaji penentuan nilai eigen suatu matriks kompleks dan menerapkan matriks kompleks dalam menentukan tingkat keakuratan metode kuasa invers dengan shift terhadap metode analitik. Matriks kompleks adalah matriks yang entri-entrinya bilangan kompleks atau terdiri dari matriks hermit jika* $A = A^*$. *Nilai eigen dengan matriks kompleks ditentukan menggunakan nilai shift yang diperoleh dari penerapan toerema Gerschgorin. Teorema Gerschgorin digunakan untuk menemukan batas nilai eigen kompleks matriks berordo* $n \times n$. *Nilai shift merupakan nilai pendekatan dari nilai eigen tak dominan.*
Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa nilai eigen suatu matriks kompleks menggunakan metode kuasa invers dengan shift terhadap metode analitik memberikan tingkat akurasi yang sama.
Kata kunci : *Matriks Kompleks, Nilai Eigen, Shift.*

Abstract. *This study examines the determination of the eigenvalues of a complex matrix and applies a complex matrix in determining the accuracy of the inverse power method with shift to the analytical method. The complex matrix is a matrix whose entries are complex numbers or are composed of a hermit matrix if* $A = A^*$ *Eigenvalues with complex matrices are determined using the shift values obtained from the application of the Gerschgorin theorem. The Gerschgorin theorem is used to find the boundary of the complex eigenvalue of the* $n \times n$ *matrix. Shift value is the value of approach of non dominant eigen value.*
The results of this study indicate that the eigenvalues of a complex matrix using the inverse power method with shift to analytical methods provide the same level of accuracy.
Keywords:. *Complex Matrix, Eigenvalue, Shift.*

PENDAHULUAN

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah matematika agar dapat diselesaikan hanya dengan operasi hitungan, yang terdiri dari operasi tambah, kurang, kali dan bagi. Salah satu penerapan dari metode numerik ini yaitu dalam masalah nilai eigen dan vektor eigen. Untuk mencari nilai eigen suatu matriks yang berukuran $n \times n$ dapat digunakan penyelesaian persamaan karakteristiknya.

Salah satu metode dalam metode numerik untuk menentukan nilai eigen dan vektor adalah metode pangkat dan metode pangkat invers. Metode pangkat invers hanya bias digunakan untuk menentukan nilai eigen pada matriks yang nilai eigennya bukan kompleks atau entri-entri didalam matriks bukan bilangan kompleks. Untuk menentukan nilai eigen dengan matriks kompleks dapat ditentukan dengan menggunakan nilai *shift* yang diperoleh dari penerapan *teorema Gershgorin*. Teorema Gershgorin digunakan dalam aljabar untuk memukan batas dari nilai eigen kompleks matriks berordo $n \times n$.

Penyelesaian penentuan nilai eigen suatu matriks menggunakan metode kuasa invers dengan *shift* telah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Andriani (2011) membahas tentang menentukan nilai eigen tak dominan suatu matriks definit negatife menggunakan metode kuasa invers. Selanjutnya Bijaksana dan Suyani (2015) membahas menentukan nilai eigen tak dominan tak dominan suatu matriks semi definit dan indefinite menggunakan metode kuasa invers dengan *shift*. Selanjutnya Aryani dan Humairah (2015) membahas penentuan nilai eigen tak dominan matriks hermit menggunakan metode pangkat invers dengan nilai *shift*. Selanjutnya Sari (2013) membahas aplikasi metode kuasa invers dengan shift dalam mengaproksimasikan nilai eigen tidak dominan suatu matriks definit negatif.

Pada penelitian sebelumnya penentuan nilai eigen suatu matriks dibatasi pada bilangan real. Penelitian ini mengkaji penentuan nilai eigen suatu matriks pada himpunan bilangan yang lebih luas yaitu bilangan kompleks.

Dekomposisi Matriks

Definisi 1 Ruminta.(2014)
Dekomposisi matriks adalah transformasi atau modifikasi dari suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah (L) dan/ matriks segitiga atas (U).
Jika A merupakan matriks bujur sangkar, matriks A dapat didekomposisi menjadi $LU, L, atau\ U$.

Matriks Kompleks

Definisi 2 Anton.H.(2000)
Suatu bilangan kompleks adalah pasangan terurut bilangan real yang dinyatakan dengan (a, b) atau $a + bi$.

Definisi 3 Hengki.H.(2015)
Matriks kompleks merupakan matriks yang entri-entrinya terdiri atas bilangan kompleks. Misalkan $\mathbb{C} = (c_{ij})$ adalah suatu matriks $m \times n$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$ untuk setiap i dan j merupakan baris ke i dan kolom ke j. Matriksnya dapat ditulis kembali kedalam bentuk $\mathbb{C} = A + iB$ dimana $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ mempunyai entri bilangan real, dan I adalah imajiner. Secara umum dapat ditulis

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & \cdots & a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & \cdots & a_{2n} + ib_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + ib_{m1} & a_{m2} + ib_{m2} & \cdots & a_{mn} + ib_{mn} \end{bmatrix}$$

Metode Numerik

Definisi 4 Chapra.(1991)
Metode numerik adalah teknik yang digunakan menformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan opersi hitung atau aritmetika biasa.
Metode kuasa invers memiliki dua buah kriteria untuk menghentikan iterasi. Kriteria penghentian pertama berdasarkan galat relatif dari nilai eigen. Kriteria kedua dipakai bila ingin menghentikan iterasi pada galat relatif yang diperbolehkan ε. Maka iterasi dihentikan jika $\left|\frac{\lambda_{ik} - \lambda_{ik-1}}{\lambda_{ik}}\right| \leq \varepsilon$ dengan λ_{ik} adalah nilai eigen λ_i pada iterasi ke-k.

Metode Kuasa Invers dengan *Shift*

Metode kuasa invers merupakan perhitungan menggunakan suatu nilai pendekatan terhadap nilai eigen tak dominan dari matriks A yang disebut dengan *shif* dan dinotasikan dengan s. Besarnya nilai *shif* akan diperoleh menggunakan *Toerema Gerschgorin*.

Definisi 5 Andriani. (2011)
Suatu nilai eigen dari suatu matriks A dinamakan nilai eigen tak dominan dari A jika nilai mutlaknya lebih kecil dari nilai- nilai eigen yang selebihnya, sedangkan vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen tak dominan dinamakan vektor eigen tak dominan A.

Salah satu cara menentukan nilai eigen tak dominan apabila aproksimasi terhadap vektor eigen tak dominan telah diketahui dengan menggunakan Kuesien Rayleigh (nilai bagi Rayleigh) untuk suatu matriks simetrik A yaitu:

$$\lambda = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

Toerema 1 Wikiversity (2017)
Misalkan λ dan vektor V bukan 0 adalah sebuah pasangan eigen dari A. Jika α adalah konstan mala $\lambda - \alpha$ dan V adalah pasangan eigen dari matriks $(A - \alpha I)$.

Teorema Gershgorin

Nilai eigen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dimuat dalam gabungan $\mathcal{K}_r$ di lingkaran Gerschgorin, didefinisikan dengan

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \ dimana \ r_i = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} |a_{ij}| \right\} \text{untuk i} = 1,2,3, \ldots \text{n}$$

Dengan kata lain, nilai eigen terdapat dalam lingkaran yang berpusat di a_{ii} dengan jari- jari yang merupakan jumlah dari nilia mutlak di A_{i*} dengan a_{ii} yang dihapus.
Karena $(A)^T = (A)$, baris mutlak dalam persamaan (2.15) yang dihapus dapat digantikan dengan jumlah kolom untuk yang dihapus. Jadi nilai eigen dari A juga termuat dalam gabungan $\mathcal{H}_c$ dari lingkaran yang didefinisikan dengan

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \ diamana \ r_i = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right\} \ untuk \ j = 1,2,3 \ldots, n$$

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian kajian teori. Studi kasus yang dijadikan rujukan pada penelitian ini adalah penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Abdurroiz, Aziz, dan Nuryana (2017) yang mengkaji tentang matriks hermit. Matriks hermit yang diperoleh dari studi kasus tersebut disimulasikan. Hasil simulasinya digunakan menggunakan dua metode yakni metode kuasa invers dengan *shift* dan metode analitik. Penelitian ini mengetahui tingkat keakuratan penentuan nilai eigen suatu matriks dengan kedua metode tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Simulasi pertama

Diberikan contoh kasus matriks A ordo 5×5 diambil dari peneltian Abdurrois (2017)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Metode analitik

   Nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = -2, \lambda = 1, dan\ \lambda = 5$

   Dari hasil pemecahan diatas dapat dilihat nilai eigen tidak dominan atau nilai mutlak terkecil adalah $\lambda = 1$

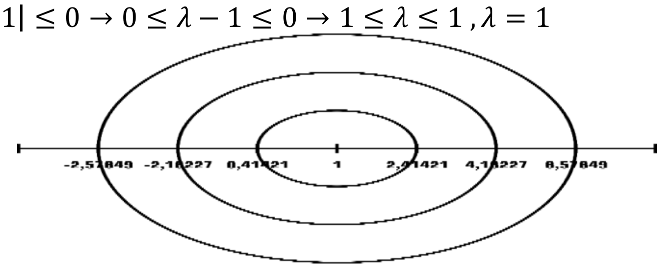
2. Metode Kuasa Invers dengan *Shift*

   a. Menentukan vektor hampiran awal dan menormalkannya.
   Kemudian dengan menormalkan vektor hampiran awal, akan diperoleh

   $$X_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44721 \\ 0.44721 \\ 0.44721 \\ 0.44721 \\ 0.44721 \end{bmatrix}$$

   b. Menentukan nilai shift dari daerah nilai eigen menggunakan teorema Gerschgorin diperoleh

   $|\lambda - 1| \leq 1.41421 \rightarrow -1.41421 \leq \lambda - 1 \leq 1.41421$
   $\rightarrow -0.41421 \leq \lambda \leq 2.41421$
   $|\lambda - 1| \leq 3.16227 \rightarrow -3.16227 \leq \lambda - 1 \leq 3.16227$
   $\rightarrow -2.16227 \leq \lambda \leq 4.16227$
   $|\lambda - 2| \leq 4.57649 \rightarrow -4.57649 \leq \lambda - 2 \leq 4.57649$
   $\rightarrow -2.57649 \leq \lambda \leq 6.57649$
   $|\lambda - 1| \leq 0 \rightarrow 0 \leq \lambda - 1 \leq 0 \rightarrow 1 \leq \lambda \leq 1, \lambda = 1$
   $|\lambda - 1| \leq 0 \rightarrow 0 \leq \lambda - 1 \leq 0 \rightarrow 1 \leq \lambda \leq 1, \lambda = 1$



GAMBAR 1. Daerah Nilai Eigen Matriks A

Gambar 1 adalah batas nilai eigen matriks A, sehingga daerah yang dibatasi untuk pengambilan nilai *shift* adalah $0.41421 \leq \lambda \leq 2.41421$ untuk memperoleh matriks baru, maka dimisalkan nilai *shift*, yaitu $s = 0.1$.

c. Menentukan suatu matriks baru dengan rumus $(A - sI)$,

$$A - sI = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 1.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

d. Menentukan dekomposisi LU dari matriks baru (A-sI). Sehingga, A-sI= LU

$$L = \begin{bmatrix} 0.4500 - 0.4500i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4000 - 0.2000i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1.0000 + 1.0000i & 3.0000 + 1.0000i & 1.9000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8000 + 0.9000i & 0.1450 - 0.1450i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0870 - 1.0290i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9000 \end{bmatrix}$$

e. Menyelesaikan $LY = PX_0$, menghasilkan,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.447213 \\ 0.24596 + 0.20124i \\ 0.50535 + 0.12969i \\ 0.44721 \\ 0.44721 \end{bmatrix}$$

f. Menyelesaikan $UZ_1 = Y$, menghasilkan,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25062 + 0.05311i \\ -0.04877 - 0.14004i \\ 0.13472 + 0.08692i \\ 0.49690 \\ 0.49690 \end{bmatrix}$$

g. Menormalkan Z dengan rumus $z_k = \frac{z}{\sqrt{z^T z}}$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.32164 + 0.06817i \\ -0.06259 - 0.17972i \\ 0.17290 + 0.11155i \\ 0.63770 \\ 0.63770 \end{bmatrix}$$

h. Mengalikan matirks A dengan vektor Z_1 yang telah dinormalkan.

$$AZ_1 = \begin{bmatrix} 0.60610 + 0.00681i \\ 0.56767 - 0.01797i \\ 0.59122 + 0.01115i \\ 0.63770 \\ 0.63770 \end{bmatrix}$$

i. Menghitung nilai eigen dengan menggunakan *kuoesien Rayleigh.*

$$\lambda_1 = \frac{\langle Z_1, AZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{{Z_1}^T\,\overline{AZ_1}}{{Z_1}^T\,\overline{Z_1}} = 1.07992$$

Karena

$|I - \hat{I}| = |1 - 1.07992| = 0.07992 > \varepsilon$ maka iterasi dilanjutkan

TABEL 1. Hasil Simulasi Pertama dengan Bantuan Program MATLAB

Iterasi (R)	**Nilai eigen**	$\boldsymbol{x_1^R}$	$\boldsymbol{x_2^R}$	$\boldsymbol{x_3^R}$	$\boldsymbol{x_4^R}$	$\boldsymbol{x_5^R}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
1	1.07992	0.60610 + 0.00681i	0.56767 - 0.01797i	0.59122 + 0.01115i	0.63770	0.63770	-
2	0.99443	0.33164 + 0.07382i	-0.06368 - 0.17385i	0.16018 + 0.10002i	0.65314	0.65314	0.08596
3	0.99826	0.34917 + 0.10963i	-0.06571 - 0.08598i	0.00845 - 0.02364i	0.65443	0.65443	0.00383
4	0.99965	0.32232 + 0.10620i	-0.11615 - 0.11988i	0.01056 + 0.01368i	0.65461	0.65461	0.00139
5	0.99993	0.33027 + 0.10986i	-0.10396 - 0.10464i	-0.00192 - 0.00521i	0.65464	0.65464	0.00027
6	0.99999	0.32621 + 0.10869i	-0.11092 - 0.11104i	0.00130 + 0.00235i	0.65465	0.65465	5.2062e-05
7	1	0.32783 + 0.10926i	-0.10825 - 0.10828i	-0.00047 - 0.00098i	0.65465	0.65465	9.5889e-06

Tabel 1 merupakan hasil iterasi matriks ordo 5×5, dalam penentuan nilai eigen menggunakan metode kuasa invers dengan *shift* yang menunjukkan iterasi akan terhenti di iterasi ke-7. Dengan demikian diperoleh $\lambda = 1$, denan $\varepsilon = 9.5889\mathrm{e} - 06$.

Simulasi kedua

Selanjutnya dengan prosedur yang sama pada matriks A maka akan ditentukan nilai eigen matriks kompleks untuk matriks B, dengan bentuk

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ 2i & 0 & 1 & -3-i & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & -3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Metode Analitik

   Sehingga nilai eigen dari matriks adalah $\lambda = 5, \lambda = 3, \lambda = -3 \; dan \; \lambda = 1$

   Dari hasil pemecahan diatas dapat dilihat nilai eigen tidak dominan atau nilai mutlak terkecil adalah $\lambda = 1$

2. Metode Kuasa Invers dengan *Shift*

   a. Menentukan vektor hampiran awal dan menormalkannya.

   Vektor awal yang diambil $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Kemudian dengan menormalkan vektor hampiran awal, akan diperoleh

   $$X_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40824 \\ 0.40824 \\ 0.40824 \\ 0.40824 \\ 0.40824 \\ 0.40824 \end{bmatrix}$$

   b. Menentukan nilai shift dari daerah nilai eigen menggunakan teorema Gerschgorin diperoleh

   $|\lambda - 1| \le 2 \rightarrow -2 \le \lambda - 1 \le 2 \rightarrow -1 \le \lambda \le 3$

   $|\lambda - 2| \le 2.23606 \rightarrow -2.23606 \le \lambda - 2 \le 2.23606$

   $\rightarrow -0.23606 \le \lambda \le 4.23606$

   $|\lambda - 1| \le 6.57649 \rightarrow -6.57649 \le \lambda - 1 \le 6.57649$

   $\rightarrow 5.57649 \le \lambda \le 6.57649$

   $|\lambda - 1| \le 3.16227 \rightarrow -3.16227 \le \lambda - 1 \le 3.16227$

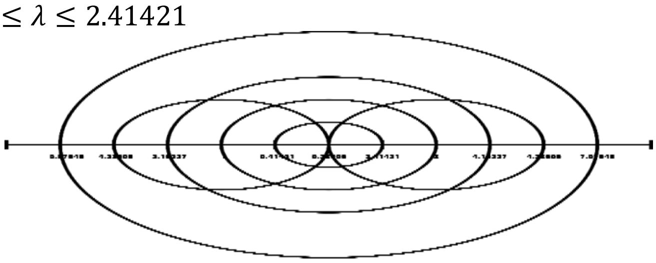
   $\rightarrow -2.16227 \le \lambda \le 4.16227$

   $|\lambda + 2| \le 2.23606 \rightarrow -2.23606 \le \lambda + 2 \le 2.23606$

   $\rightarrow -4.23606 \le \lambda \le 0.23606$

   $|\lambda - 1| \le 1.41421 \rightarrow -1.41421 \le \lambda - 1 \le 1.41421$

   $\rightarrow 0.41421 \le \lambda \le 2.41421$



GAMBAR 2. Daerah Nilai Eigen Matriks B

Gambar 2 adalah batas daerah nilai eigen matriks B. Sehingga daerah yang dibatasi untuk pengambilan nilai *shift* adalah $-0.41421 \le \lambda \le 2.41421$ untuk memperoleh matriks baru, maka dimisalkan nilai *shift*, yaitu $s = 0.3$.

c. Menentukan suatu matriks baru dengan rumus $(A - sI)$,

$$A - sI = \begin{bmatrix} 0.7 - i & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 - 2i & 0 & 0 & 2 + i & 0 \\ -2i & 0 & 0.7 - i & -3 - i & 0 & -1 + i \\ 0 & 0 & -3 + i & 0.7 - i & 0 & 0 \\ 0 & 2 - i & 0 & 0 & 0.7 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & -1 - i & -1 - i & 0 & 0.7 - i \end{bmatrix}$$

d. Menentukan dekomposisi LU dari matriks baru (A-sI). Sehingga, A-sI= LU

$$L = \begin{bmatrix} 0.5000 + 0.3500i & 0 & 0.4355 - 0.6065i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6800 - 0.6600i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2000 + 0.4000i & -0.1234 + 0.1497i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0.7 - i & -3 - i & 0 & -1 + i \\ 0 & 2 - i & 0 & 0 & 0.7 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & -3 + i & 0.7 - i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4516 + 2.4101i & 0 & 0.8500 - 0.1500i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2040 + 0.1020i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7824 - 1.1458i \end{bmatrix}$$

e. Menyelesaikan $LY = PX_0$, menghasilkan,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40824 \\ 0.40824 - 5.50154i \\ 0.40824 - 1.40334i \\ 0.02633 + 0.10471i \\ 0.13063 + 0.26944i \\ 0.34552 - 0.15432i \end{bmatrix}$$

f. Menyelesaikan $UZ_1 = Y$Menghasilkan,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02024 + 0.36454i \\ 1.04063 - 0.80048i \\ -0.11747 - 0.01476i \\ -0.02981 + 0.06194i \\ 1.04063 + 0.80048i \\ 0.23229 + 0.14293i \end{bmatrix}$$

g. Menormalkan Z dengan rumus $z_k = \frac{z}{\sqrt{z^T z}}$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.01056 + 0.19019i \\ 0.54292 - 0.41763i \\ -0.06128 - 0.00770i \\ -0.01555 + 0.03231i \\ 0.54292 + 0.41763i \\ 0.12119 + 0.07457i \end{bmatrix}$$

h. Mengalikan matirks A dengan vektor Z_1 yang telah dinormalkan.

$$AZ_1 = \begin{bmatrix} 0.21616 + 0.05705i \\ 0.37586 - 0.12528i \\ 0.19460 - 0.00231i \\ 0.20832 + 0.00969i \\ 0.37586 + 0.12528i \\ 0.24935 + 0.02237i \end{bmatrix}$$

i. Menghitung nilai eigen dengan menggunakan *kuoesien Rayleigh.*

$$\lambda_1 = \frac{\langle Z_1, AZ_1 \rangle}{\langle Z_1, Z_1 \rangle} = \frac{{Z_1}^T \overline{AZ_1}}{{Z_1}^T \overline{Z_1}} = -0.54297$$

Karena $\left| I - \hat{I} \right| = |1 - (- - 0.54297297)|=$ 0. 45702 maka iterasi dilanjutkan

TABEL 2. Hasil Simulasi Kedua dengan Bantuan Program MATLAB

Iterasi (R)	**Nilai Eigen**	X_1^R	X_2^R	X_3^R	X_4^R	X_5^R	X_6^R
1	0.54297	0.21616 + 0.05705i	0.37586 - 0.12528i	0.19460 - 0.00231i	0.20832 + 0.00969i	0.37586 + 0.12528i	0.24935 + 0.02237i
2	-0.12273	(-0.00951) + 0.09450i	0.09921 - 0.03307i	-0.02503 - 0.00457i	-0.00402 + 0.01661i	0.09921 + 0.03307i	0.05608 + 0.05216i
3	0.02216	(-0.0169) + 0.00734i	0.01630 - 0.00543i	0.00214 - 0.00093i	0.00227 + 0.00278i	0.01630 + 0.00543i	-0.00178 + 0.020001i
4	-0.00386	(-0.00402) - 0.00215i	0.00291 - 0.00097i	-0.00014 + 9.16771i	-0.00068 + 0.00083i	0.00291 + 0.00097i	-0.00441 + 0.00231i
5	0.00068	(-0.00013)- 0.001140i	0.00051 - 0.00017i	1.09489 - 1.35653i	-0.00021 - 3.09479i	0.00051 + 0.00017i	-0.00107 - 0.00054i
6	-0.00012	0.00021 - 0.00018i	9.06111 - 3.02037i	-4.48151 + 1.28011i	-2.76055 - 4.65787i	9.06111 + 3.02037i	-4.25503 - 0.00029i
7	2.13239	6.70048 + 1.64032i	1.59890 - 5.32968i	1.40706 - 1.24013i	5.70788 - 1.23583i	1.59890 + 5.32968i	5.32359 - 4.98912i
8	-3.76186	6.15431 + 1.58145i	2.82163 - 9.40544i	2.5900 + 1.04243i	3.28207 - 5.66868i	2.82163 + 9.40544i	1.75360 + 3.68789i
9	6.63931	(-2.31808) + 3.46733i	4.97934 - 1.65978i	-4.36714 - 8.10062i	5.77049 + 5.78564i	4.97934 + 1.6597i	1.73000 + 4.05018i
10	-1.17159	(-1.02469) + 2.19755i	8.78708 - 2.92902i	5.94605 + 5.65199i	-3.51240 + 1.97936i	8.78708 + 2.92902i	-5.71722 + 9.19211i
31	1.66533	-4.50595 - 1.56496i	0.00000 - 1.11022i	-2.79259 - 3.33426i	-3.18284 + 2.64621i	2.22044i	-1.64434 - 5.04259i
32	3.60822	2.51586 - 3.11289i	-1.66533 + 3.33066i	3.12963 + 2.04630i	-5.01868 - 6.03546i	-4.44089 + 2.22044i	-1.30225 - 4.02146i
33	1.38777	9.813411 + 6.78200i	-5.55111 - 4.44089i	-3.06568 - 9.02779i	5.07862 - 1.86110i	3.33066 - 4.44089i	6.26153 - 8.28982i
34	1.38777	1.24654 + 2.07143i	5.55111 + 4.44089i	3.38542 + 1.88079i	4.46297 - 1.60049i	-3.33066 + 4.44089i	2.55158 + 9.23461i
35	1.38777	(-2.41380) + 5.42930i	-5.55111 - 4.44089i	-1.88079 + 4.70197i	9.51258 + 6.73012i	3.33066 - 4.44089i	3.41026 + 5.26758i

Tabel 2 merupakan hasil iterasi matriks ordo 6×6, dalam penentuan nilai eigen menggunakan metode kuasa invers dengan *shift* yang menunjukkan iterasi akan terhenti di iterasi ke-35. Dengan demikian diperoleh $\lambda = 1$, denan $\varepsilon = 3.410268533508 44\text{e} - 22 + 5.26758155032132\text{e} - 22\text{i}$.

KESIMPULAN

Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada simulasi pertama menghasilkan tingkat keakuratan yang sama, antara metode kuasa invers dengan *shift* terhadap metode analitik. Hal yang sama juga ditunjukkan pada simulasi kedua. Pada penentuan nilai eigen suatu matriks kompleks menggunakan metode kuasa invers dengan *shift* terhadap metode analitik menunjukkan tingkat keakuratan yang sama.

Peneliti telah mengkaji tentang penentuan nilai eigen suatu matriks kompleks menggunakan metode kuasa invers dengan *shift*. Disarankan bagi penelitian selanjutnya dapat menguji menggunakan metode lain diantaranya metode kuasa invers dengan *shift* untuk mencari nilai eigen dalam studi kasus tentang system persamaan linear fuzzy atau non linear fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrois, Aziz, D., & Nuryaman, A. (2017). Diagonalisasi Secara Uniter Matriks Hermit dan Aplikasinya pada Pengamanan Pesan Rahasia. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif.* ISBN No. 978-602-98559-3-7. Lampung, Indonesia: Universitas Lampung.

Andriani, Y. (2011). Menentukan Nilai Eigen Tak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shift. *Jurnal Penelitian Sains* Volume. 14, Nomor 1(A), 14103.

Anton, H. (2000). *Dasar-dasar Aljabar Liniear Jilid 2* (Terjemahan oleh Hari Suminto & Lyndon Saputra). Batam: Interaksara.

Aryani, F & Humairoh, D. (2015). Penentuan Nilai Eigen Tak Dominan Matriks Hermit Menggunakan Metode Pangkat Invers dengan Nilai Shift. *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 7*. ISSN : 2085- 9902. Pekanbaru Riau, Indonesia: UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

Bijaksana, A., & Suryani, I. (2015). Menentukan Nilai Eigen Tak Dominan Suatu Matriks Semi Definit dan Indefinit Menggunakan Metode Kuasa Invers dengan Shift. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* Volume. 1, Nomor 2, ISSN 2460-4542.

Chapra, S. C., & Chanale R. P. (1991). *Metode Numerik untuk Teknik*. Jakarta: UI-press

Hengki, H., Helmi., Kiftiah, M. (2015). Diagonalisasi Matriks Kompleks. *Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, Volume 04, Nomor 3, hal 337- 346.

Ruminta, (2014). *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains

Sari, A. A. P. (2013). Aplikasi Metode Kuasa Invers dengan Shift dalam Mengaproksimasikan Nilai Eigen Tidak Dominan Suatu Matriks Definit Negatif. (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Wikiversity. (2 November 2017). Shifted Inverse Iteration. https://en.wikiversity.org/wiki/Shifted_inverse_iteration diakses pada tanggal 12 april 2018.